

Узнайте стоимость
написания студенческой
работы на заказ
В.И.Малыхин
<http://>

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:

1. Дипломы, курсовые,
рефераты, чертежи...
2. Диссертации и научные
работы

3. Школьные задания

Онлайн-консультации

ЛЮБАЯ тематика, в том
числе ТЕХНИКА

Приглашаем авторов

www.учебники.информ2000.рф/student-aspirant.shtml

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

УДК 336:51(075.8)

ББК 65.26в6.я73

M20

<http://www.stankin.ru>

кафедра математики Московского государственного
технологического университета «СТАНКИИ»

(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Холщевникова)

канд. экон. наук, доц. Я.С. Мелкумов

Главный редактор издательства
доктор экономических наук *Н.Д. Эриашвили*

Мальхин В.И.

M20 Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. —
2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. —
237 с.

ISBN 5-238-00559-8

Рассмотрены вопросы финансовой математики в условиях определенности (наращенные и дисконтированные суммы, потоки платежей, ренты, кредитные расчеты, оценка инвестиционных проектов, финансовые расчеты на рынке ценных бумаг), а также в условиях неопределенности, в том числе теория оптимального портфеля, теоретико-вероятностные методы и финансовые риски. Даны вопросы для самопроверки, задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для студентов и преподавателей экономических и финансовых специальностей вузов.

ББК 65.26в6.я73

ISBN 5-238-00559-8

© В.И. Мальхин, 1999, 2003

© ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА, 1999, 2003.

Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издательства

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Есть ли такая наука — <http://www.math.ru> математика? Что она включает в себя, кроме элементарных подсчетов сложных процентов? После замечательных работ Х. Марковица 1952 г. (H.M. Markowitz) и Д. Тобина 1965 г. (D. Tobin), за которые их авторы позже получили Нобелевские премии, можно с уверенностью сказать, что такая наука есть. А после знакомства с книгой российского математика А.Н. Ширяева «Основы стохастической финансовой математики» этот вывод станет еще увереннее.

Любая наука интересна содержащимися в ней идеями. В финансовой математике такие идеи есть. Идеи Марковица и Тобина о строении оптимального портфеля ценных бумаг доступны даже домохозяйкам. Идея оптимального портфеля Марковица и Тобина очень проста. Предположим, что Вы имеете 1 000 000 000 долл. (отчасти поэтому «Вы» написано с большой буквы!). Вы хотите купить на всю сумму ценные бумаги: облигации, акции и т.п. И конечно, Вы хотите, чтобы они приносили Вам некоторый доход, но излишне рисковать Вы не хотите. Теория Марковица и Тобина диктует изящное решение: структура рискованных ценных бумаг Вашего портфеля должна повторить структуру большого рынка этих бумаг! Если на большом рынке 1% всех рискованных бумаг по стоимости составляют акции и облигации «General Motors», то и в Вашем портфеле среди рискованных бумаг бумаги этой компании должны составить такую же долю! Инвестор может лишь варьировать долей безрисковых ценных бумаг в своем портфеле (больше таких бумаг — меньше доход и меньше риск, и наоборот).

Безусловно, достойны внимания великолепные конструкции опционов, начисто уничтожающие риск. Наверное, как и выводы теории Марковица и Тобина, эти конструкции должны быть известны как можно более широкому кругу людей и не только финансистов.

Конечно, нужно знать и трезвый вывод из всех этих финансовых нововведений: все они придуманы для того, чтобы извлекать прибыль на финансовом рынке, т.е. из остальных участников этого рынка. Давний вывод о том, что на финансовом рынке выигрывают лишь «акулы», лишь те, кто имеет больше денег, кто имеет больше информации, остается верным и на сегодняшний день.

Понятно, что финансы являются лишь частью (очень важной, но все-таки частью) всей экономики. Настоящие лидеры экономики — это производители материальных ценностей и услуг: автомобилей, магнитофонов, компьютеров и т.п. Только там, в реальном секторе экономики, делаются «настоящие» деньги, и финансовая сфера, ка-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

кие бы цели она ни преследовала сама по себе, вынуждена заниматься обслуживанием этого сектора.

В науке о финансах, как в никакой другой, важна оценка действующим лицом (инвестором, участником рынка и т.п.) дохода и риска финансовой операции. Но автор счел возможным в основной части книги ограничиться объективными показателями, вынеся субъективные в дополнения к обеим частям книги.

При написании данного пособия автор руководствовался следующей установкой: пособие должно быть понятно и полезно студентам младших и средних курсов экономических вузов; автор хотел бы, чтобы оно оказалась полезным и преподавателям. Изложенный материал содержит все самое важное из финансовой математики и его достаточно для обычного семестрового курса (15—18 лекций и столько же практических занятий). Автор, не будучи финансистом, исходил из того, что финансовая математика — это всего лишь скелет науки о финансах, «нарастить мясо» на этом скелете — дело специальных кафедр. Важной целью было также желание продемонстрировать студентам полезность применения уже в основном изученной ими вузовской математики в других важных областях.

В пособии приведено много примеров, иллюстрирующих изложение материала, в конце каждого параграфа даются вопросы и задачи. Задач вполне достаточно для организации практических занятий.

Автором создан программный комплекс «Учебное рабочее место финансиста» («УРМ финансиста»), содержащий около 100 важнейших типичных задач по финансовой математике. Программы написаны на языке Паскаль 6. Этот УРМ использовался при написании данного пособия, главным образом при подборе примеров и задач. В некоторых задачах предлагается проверить расчеты, выполненные с помощью этого комплекса.

Пособие делится на две части, части — на главы (лекции), главы — на параграфы.

По финансовой математике издано немало книг (см. библиографический список в конце книги). Я благодарен авторам этих книг — по ним я знакомился с финансовой математикой, широко использовал материал этих книг без специального цитирования. Но за все недостатки данного пособия несу ответственность только я один.

В. Малыгин

Узнайте стоимость
написания студенческой
работы на заказ
<http://>

Часть I _____

**ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ
В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

- Глава 1. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ
ДЕНЕЖНЫХ СУММ
- Глава 2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ
- Глава 3. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ
- Глава 4. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
- Глава 5. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ДОХОДНОСТИ
ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ
- Глава 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ
ИНСТРУМЕНТОВ

ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ I _____

- Глава 7. СИСТЕМА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНДИВИДА
И УЧЕТ ЕЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ
ОПЕРАЦИЙ
- Глава 8. МОДЕЛИ ТОРГОВ

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ <http://>

Финансовые расчеты в условиях определенности опираются на две аксиомы:

1. Денежные суммы $S(T)$ в момент T и $S(t)$ в момент t эквивалентны по ставке сравнения i , если $S(T) = S(t)(1+i)^{(T-t)}$.

2. Схемы финансовых расчетов могут быть признаны эквивалентными, и тогда они могут заменяться одна другой.

В дальнейшем эти аксиомы будут наполнены конкретным содержанием.

В гл. 1 изложена теория процентов — простых и сложных, в гл. 2 — потоки платежей, в основном рентных, затем излагаются разнообразные методы погашения займов (гл. 3), в гл. 4 — анализ инвестиционных процессов. Последние две главы посвящены расчету доходности как общих финансовых операций, так и конкретных финансовых инструментов.

Для усвоения материала части I достаточно знания вузовского курса математического анализа и немного теории вероятностей.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Глава 1 НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ

<http://>

Денежные суммы изменяются во времени. Люди берут кредиты (ссуды) и сами ссужают деньги (например, кладут их в банк) в надежде улучшить в будущем свое материальное положение (или для других целей). При этом они имеют в виду какие-либо конкретные действия, например, они намереваются купить магазин и за счет прибыли от работы выплатить взятые займы деньги или накопить на машину и совершать приятные путешествия. Для того чтобы заинтересовать других людей ссудить необходимые деньги, им обязуются вернуть в будущем большую сумму. Это и есть основание теории процента.

1.1. Нарращение простых процентов

Основные термины — единичный промежуток начисления и ставка процента. *Ставку процента* обозначаем i . Фиксируем какую-нибудь сумму P . При наращении простых процентов по ставке i каждая следующая сумма больше предыдущей на долю i от начальной суммы P , т.е. на iP . К концу единичного промежутка начисления сумма P возрастет на iP и станет $P_1 = P + iP = P(1 + i)$, к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на iP и станет $P_2 = P_1 + iP = P(1 + i) + iP = P(i + 2i)$ и т.д. К концу n -го промежутка начисления наращенная сумма станет $P_n = P(1 + ni)$. Таким образом, последовательность наращенных сумм P, P_1, \dots, P_n есть арифметическая прогрессия с начальным членом P и разностью iP .

Пример 1. Пусть $P = 1000$, $i = 10\%$, т.е. как доля $i = 0,1$. Следовательно, наращенные по простым процентам суммы таковы:
 $1000, 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100,$
 $1100 + 100 = 1200, 1200 + 100 = 1300$

и т.д.

Пример 2. Годовая ставка простых процентов равна 12,5%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1 + 0,125 \cdot n) \geq 2$, т.е. $0,125 \cdot n \geq 1$. Получаем $n \geq 1/0,125$.

Ответ: через 8 лет.

Формула наращения простых процентов $P = P(1 + ni)$, выведенная для целых положительных n , вполне может применяться и для нецелых t .

Узнайте стоимость

написания студенческой

Сумма P , наращенная по ставке i простых процентов, через t промежутков начисления станет $P_t = P(1 + it)$.

работы на заказ

<http://>

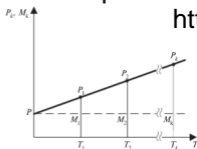


Рис. 1.1

Разность наращенной суммы и начальной называется *процентными деньгами*. При наращении простых процентов процентные деньги растут в арифметической прогрессии. Графически это показано на рис. 1.1, где P — начальная сумма, отрезки $P_k T_k$ — наращенные суммы и отрезки $P_k M_k$ — процентные деньги.

1.2. Наращение сложных процентов

При наращении сложных процентов по ставке i каждая следующая сумма возрастает на долю i от предыдущей. Таким образом, к концу единичного промежутка начисления сумма P возрастет на долю i и станет $P_1 = P + iP = P(1 + i)$ к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на долю i от P_1 и станет $P_2 = P_1 + iP_1 = P(1 + i) + iP(1 + i) = P(1 + i)^2$ и т.д. К концу n -го промежутка начисления наращенная сумма станет $P_n = P(1 + i)^n$. Таким образом, последовательность наращенных сумм P, P_1, \dots, P_n есть геометрическая прогрессия с начальным членом P и знаменателем прогрессии $(1 + i)$.

Пример 3. Пусть $P = 1000$, $i = 10\%$, т.е. как доля $i = 0,1$. Следовательно, наращенные по сложным процентам суммы таковы: $1000, 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100, 1100 + 0,1 \cdot 1100 = 1210, 1210 + 0,1 \cdot 1210 = 1331,1$ и т.д.

Пример 4. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1 + 0,08)^n \geq 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и получаем $n > \ln(2)/\ln(1,08)$.

Ответ: через 9 лет.

Из этого примера видно, что вычисления со сложными процентами более сложные, чем с простыми. Для занятий по финансовой математике необходимо иметь хороший кальку-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

лятор (достаточно, чтобы можно было возводить любое положительное число в произвольную степень).

Формула наращивания сложных процентов $P_n = P(1+i)^n$, выведенная для целых положительных n , может применяться и для нецелых t .

Сумма P , наращенная по ставке i сложных процентов, через t промежутков начисления станет $P_t = P(1+i)^t$.

Пример 5. 13 января в банк положили сумму 1000 д.е. до востребования под ставку 12% годовых сложных процентов. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября?

Решение. Воспользуемся формулой наращивания сложных процентов $P_t = P(1+i)^t$. Но как вычислить t ? Надо признать, что однозначного ответа в этой ситуации нет. Изберем самый простой вариант: будем считать, что в году 360 дней, в квартале — 90, в одном месяце — 30 и т.д. (учтем, что в году есть несколько праздничных дней и т.д.). Тогда $t = (30 \cdot 7 + 17)/360$ и искомая сумма есть 1074 д.е.

При работе со сложными процентами иногда для приближенного оценивания полезно следующее правило.

Правило 72. Если процентная ставка есть α , то удвоение капитала по такой ставке происходит примерно за $72/\alpha$ лет.

Например, согласно этому правилу при ставке 3% удвоение капитала происходит за 24 года.

Это правило применяется для небольших ставок.

В дальнейшем, если не указано, какие проценты используются, то имеются в виду сложные проценты.

1.3. Сравнение силы роста простых и сложных процентов

При одной и той же ставке i наращивание сложных процентов идет быстрее, чем простых процентов, при длине периода наращивания более единичного и медленнее, если период наращивания менее единичного.

Для этого достаточно убедиться, что

$(1+i)^t > (1+it)$, если $t > 1$
и $(1+i)^t < (1+it)$, если $0 < t < 1$.

Графики функций $(1+i)^t$ и $(1+it)$ в зависимости от t показаны на рис. 1.2.

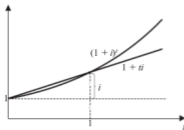


Рис. 1.2

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Пример 6. Пусть сумма 800 наращивается по ставке $i = 8\%$ простых и сложных процентов. Тогда наращенные суммы таковы:

Простые проценты	800	804	928	992
Сложные проценты	800	864	933,1	1007,8
Промежутки начисления	1	2	3	

<http://>

1.4. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители

Для облегчения расчетов, особенно со сложными процентами, составлены таблицы мультиплицирующих множителей.

Мультиплицирующий множитель показывает, во сколько раз возрастет за n лет сумма, положенная в банк под i процентов годовых:

$$M(n, i) = (1 + i)^n.$$

Величина $M(n, i)$ есть будущая стоимость одной денежной единицы — через n лет при ставке процента i .

Так, $M(5, 8)$ есть 1,469. Таблицы таких множителей имели большое значение для финансовых расчетов ранее, когда не было электронных калькуляторов. Но и сейчас во многих ситуациях такие таблицы весьма удобны. Ниже приведен фрагмент таблицы мультиплицирующих множителей $M(n, i)$ для $2 < n < 11$, $2 < i < 12$. Таблица большого объема приведена в приложении 1.

Мультиплицирующие множители

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368
4	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518
5	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685
6	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870
7	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076
8	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305
9	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558
10	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839

Для облегчения расчетов используются также таблицы дисконтирующих множителей.

Дисконтирующий множитель показывает долю, которую составит начальная сумма, положенная в банк под i процентов годовых, от наращенной к концу n -го года:

$$D(n, i) = 1/M(n, i) = (1 + i)^{-n}.$$

Узнайте стоимость

написания студенческой

Величину $D(n, i)$ называют еще *приведенной*, или *современной*, *стоимостью* одной денежной единицы через n лет при ставке процента i **работы на заказ**

Так, $D(5, 8) = 0,681$. Ниже приведен фрагмент таблицы дисконтирующих множителей $D(n, i)$ для $2 < n < 11$, $2 < i < 12$. Таблица большого объема приведена в приложении 2.

Дисконтирующие множители

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,731
4	0,888	0,855	0,823	0,772	0,763	0,735	0,708	0,683	0,659
5	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,593
6	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,535
7	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,482
8	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,434
9	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,391
10	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,442	0,386	0,352

1.5. Удержание простых и сложных процентов

Некто попросил в банке кредит в размере 1000 руб. Банкир говорит: «Пожалуйста. Процентная ставка у нас 10% годовых, так что 100 руб. мы с Вас сейчас же удержим. Итак, получите 900, но вернете через год, конечно, все 1000». Такая операция называется *удержанием процентов*. В этой операции все в пользу банкира. Во-первых, проценты уже удержаны. Во-вторых, доходность этой операции для банка больше, чем объявленные 10%.

Действительно, доходность операции для банка равна $100/900 \sim 11,1\%$. Поэтому подобную операцию — удержание процентов с конечной суммы — кредиторы применяют довольно часто.

Долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал векселя) в конкретный срок, называется *векселем*. Учет векселя — обычное дело для банка и означает оплату векселя с дисконтом, т.е. со скидкой с его номинала.

Пример 7. Банк учел вексель за 70% его номинала за полгода до его выкупа. Какова доходность операции для банка?

Пусть номинал векселя N , тогда банк заплатил владельцу векселя $0,7N$, а получил через полгода N , поэтому доходность операции (абсолютная за полгода) равна $0,3/0,7 = 0,43$, т.е. 43% (а в процентах годовых это дает 104,5% — см. далее гл. 6).

Удержание процентов можно проводить также по простым процентам и сложным. Рассмотрим сначала удержание простых процентов. Пусть ставка удержания — d (доля),

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

тогда за каждый год удерживается одна и та же величина — доля d с конечной суммы P , так что, если кредит выдается на n лет, то будет удержано ndP и оставшаяся после удержания сумма есть $P_n = P - ndP = P(1 - nd)$

Оставшиеся после удержания суммы образуют убывающую арифметическую прогрессию.

Если же удержание проходит по сложным процентам, то за каждый год удерживается доля d от предыдущей суммы, так что оставшаяся сумма есть $P = P(1 - d)^n$. Оставшиеся после удержания суммы образуют убывающую геометрическую прогрессию.

Пример 8. С суммы 800 удерживаются проценты по ставке 4%. Выписать оставшиеся суммы.

Промежутки удержания	-4	-3	-2	-1	0
Простые проценты	672	704	736	768	800
		(арифметическая прогрессия)			
Сложные проценты	679,5	707,8	737,3	768	800
		(геометрическая прогрессия)			

При удержании простые проценты уменьшают сумму медленнее, чем сложные, на промежутках, длиннее единичного (см. § 3).

Для облегчения расчетов при удержании сложных процентов используются дисконтные множители.

Дисконтный множитель показывает, во сколько раз уменьшится сумма при удержании с нее сложных процентов по ставке d в течение n промежутков удержания:

$$\text{Dis}(n, d) = (1 - d)^n.$$

Можно также сказать, что до величины $\text{Dis}(n, d)$ уменьшится одна денежная единица, с которой удерживаются сложные проценты по ставке d в течение n периодов.

Удержание процентов имеет ограниченную область применения — оно редко применяется для числа промежутков удержания более двух-трех. Ниже приведен фрагмент таблицы дисконтных множителей $\text{Dis}(n, i)$ для $0 < n < 4$, $2 < i < 12$.

Дисконтные множители

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,970	0,960	0,950	0,940	0,930	0,920	0,910	0,900	0,890
2	0,941	0,922	0,903	0,884	0,865	0,828	0,828	0,810	0,792
3	0,913	0,885	0,857	0,831	0,804	0,779	0,754	0,729	0,705

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Удержание процентов аналогично начислению процентов:
начисление процентов: если сейчас положить сумму S , то через год она станет $S(1+i)$,
удержание процентов: чтобы через год получить с клиента сумму S , надо сейчас выдать ему $S(1-d)$.

<http://>

1.6. Эквивалентность во времени денежных сумм. Математическое дисконтирование

Денежные суммы $S(T)$ в момент T и $s(t)$ в момент t называются *эквивалентными по ставке сравнения i* , если $S(T) = s(t)(1+i)^{(T-t)}$. При $T > t$ это означает, что сумма $s(t)$, наращенная по ставке i сложных процентов, превратится в момент T в сумму $S(T)$; однако можно считать, что T может быть и меньше t , тогда это означает, что сумма $S(T)$, наращенная по ставке i сложных процентов, превратится, в момент t в сумму $s(t)$. Указанная выше формула автоматически учитывает оба эти случая. Вместе с тем можно сказать и по-другому: при $T > t$ эквивалентность сумм $S(T)$ и $s(t)$ означает, что сумма $S(T)$, уменьшающаяся при движении в прошлое за каждый единичный промежуток в $1/(1+i)$ раз, к моменту t превратится в точности в сумму $S(t) = S(T)/[(1+i)^{(T-t)}]$. Такой пересчет будущей суммы к настоящему моменту называется *приведением ее* или *нахождением ее современной величины*. Сама же формула сравнения денежных сумм в любые моменты времени называется *математическим дисконтированием*.

Пример 9. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: \$1000 сегодня или \$2000 через 8 лет?

Решение. Найдем современную величину \$2000 через 8 лет при ставке 6%: $A = 2000 \cdot (1 + 0,06)^{-8} = 2000 \cdot D(8,6)$. По таблице дисконтирующих множителей находим $D(8, 6) = 0,627$.

Итак, $A = 1254 > 1000$. Следовательно, надо предпочесть сумму \$2000 через 8 лет.

1.7. Номинальная и эффективная процентные ставки

Предположим, что по требованию некоторых клиентов банк начисляет им проценты ежеквартально, хотя в договоре указана годовая процентная ставка $i = 12\%$. Если начислять ежеквартально $12/4 = 3\%$ по схеме сложных процентов, то за год получим $f = (1 + 0,03)^4 = 1,1255$ (можно взглянуть в таблицу мультиплицирующих множителей и найти $M(4, 3) = 1,126$).

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Ставка $f = 12,6\%$ называется *эффективной*, а объявленная 12% — *номинальной*. Так как ставка получается больше, чем в договоре, то банк так делать не будет. Хорошим выходом в данной ситуации является начисление ежеквартальных простых процентов по ставке 3% .

<http://>

В общем случае номинальной называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах и т.п., а действительная ставка, которая при этом получается, называется *эффективной*.

Пусть номинальная годовая ставка есть i , а сложные проценты начисляются m раз в году по ставке i/m . Тогда эффективная годовая ставка f рассчитывается из уравнения $(1 + i/m)^m = 1 + f$, откуда $f = (1 + i/m)^m - 1$.

Если все же надо начислять сложные проценты m раз в году, то какова же должна быть при этом ставка t , чтобы за год в итоге получилась нужная ставка f ? Имеем уравнение $(1 + t)^m = 1 + f$, откуда $t = (1 + f)^{1/m} - 1$.

1.8. Непрерывное наращение и дисконтирование

Пусть номинальная годовая ставка есть i . При начислении процентов m раз в году по ставке i/m эффективная годовая ставка получается, как показано выше, равной $f = (1 + i/m)^m - 1$, т.е. за год сумма увеличится в $(1 + i/m)^m$ раз. Рассмотрим этот коэффициент наращения, или мультиплицирующий множитель $M(m, i/m)$. При все более частом начислении процентов, т.е. при $m \rightarrow \infty$, величина $M(m, i/m)$ имеет предел, который, как известно, равен e^i , где e — основание натуральных логарифмов ($e \approx 2,71$). *Непрерывным наращением* по ставке i называется увеличение суммы в e^i раз за единичный промежуток начисления и в общем виде — увеличение суммы в e^{it} раз за t промежутков начисления. *Непрерывным дисконтированием* называется операция, обратная непрерывному наращению, т.е. уменьшение суммы в e^i раз за единичный промежуток и уменьшение в e^{it} раз за t промежутков.

1.9. Влияние инфляции на ставку процента

Говорят, что инфляция (или темп инфляции) составляет долю α в год, если один и тот же набор товаров стоит в конце года в $(1 + \alpha)$ раз больше, чем в начале этого года. Можно также сказать, что в $(1 + \alpha)$ раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Последнее означает, что если в начале года на 1 руб. можно было купить, например, 100 г сахара, то в конце года только, скажем, 90 г. Ясно, что инфляция уменьшает реальную ставку процента. Это будет уже ставка процента с учетом инфляции. Действительно, одна денежная единица возрастает за год в $(1 + i)$ раз из-за наращивания процентов, но ее покупательная способность уменьшается в $(1 + \alpha)$ раз из-за инфляции. Таким образом, ее реальная ценность — покупательная способность — станет $(1 + i)/(1 + \alpha)$, а годовая реальная ставка есть $(1 + i)/(1 + \alpha) - 1 = (i - \alpha)/(1 + \alpha)$. Видно, что при малой инфляции (когда α мало) реальная процентная ставка меньше номинальной приблизительно на величину инфляции. Для того чтобы номинальная ставка i обеспечивала наращивание реальной ценности денежных сумм на долю j в год при годовой инфляции α , темп инфляции должен удовлетворять уравнению: $(i - \alpha)/(1 + \alpha) = j$, откуда $i = \alpha + j(1 + \alpha)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. При какой ставке сложных процентов за 9 лет сумма удваивается?
2. В день рождения внука бабушка положила в банк \$1000 под 3% годовых. Какой будет эта сумма к семнадцатилетию внука?
3. Как найти инфляцию за квартал, если известна годовая инфляция?
4. Найдите несколько сумм в прошлом и в будущем, эквивалентных сумме 1000 д.е. в момент 0 при ставке 8% годовых.
5. Счет «СБ100» в Сбербанке обещает 2,9% за 100 дней. Сколько это составит процентов годовых?
6. Докажите строго, что при одной и той же ставке i наращивание сложных процентов идет быстрее, чем простых процентов, при длине периода наращивания, более единичного, и медленнее, если период наращивания менее единичного, т.е. докажите неравенства $(1 + i)^t > (1 + it)$, если $t > 1$ и $(1 + i)^t < (1 + it)$, если $0 < t < 1$. Докажите, что при удержании процентов, наоборот, простые проценты уменьшают сумму медленнее, чем сложные.
7. Рассмотрим последовательность оставшихся после удержания 4% сумм из примера 8 в обратном порядке и будем считать их наращенными суммами:

Простые проценты	672	704	736	768	800
Сложные проценты	679,5	707,8	737,3	768	800
Промежутки начисления	1	2	3	4	5

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Первая последовательность есть последовательность наращенных сумм по простым процентам, вторая — по сложным. Найдите соответствующие ставки.

8. Докажите, что $f = (1 + i/n)^n - 1 > i$, т.е. что эффективная ставка больше номинальной ($n = 1$ — натуральное число).

9. Убедитесь, что для расчетов по инфляции (во сколько раз упала покупательная способность одной денежной единицы и т.п.) можно использовать мультиплицирующие или дисконтирующие множители.

10. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась 6%?

11. Нарастение простых процентов с переменной ставкой. Пусть простые проценты за k -й год равны i_k . Найдите наращенную сумму через n лет.

12. Нарастение сложных процентов с переменной ставкой. Пусть сложные проценты за k -й год равны i_k . Найдите наращенную сумму через n лет.

13. По договору зафиксирован платеж через 3 года в размере 1000 д.е. Через год процентная ставка увеличилась. Кому это выгодно: тому, кому будут платить, или тому, кто будет платить?

14. С помощью компьютера получены следующие значения наращенных сумм через дробные промежутки времени.

	Начальная сумма	Процентная ставка 12%		
Простые проценты	800	809,6	819,2	828,8
Сложные проценты	800	809,1	818,3	827,7
Доля единичного промежутка начисления	0,0	0,1	0,2	0,3

Проверьте компьютерные расчеты, используя приведенные в § 1.3 формулы наращивания простых и сложных процентов.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 2 работы на заказ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ <http://>

Потоки платежей весьма часто встречаются на практике. Заработная плата выплачивается, как правило, в виде потока платежей 2 раза в месяц, примерно через 15 дней. Плата за квартиру — поток, как правило, ежемесячных платежей. Семья откладывает на покупку автомобиля, внося ежемесячно на счет в банк некоторую сумму, и т.д. Поэтому изучение потоков платежей очень важно.

2.1. Потоки платежей

Поток платежей — это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком плюс, который может быть опущен, — это поступление, платежи со знаком минус представляют собой выплаты.

Поток называется конечным или бесконечным в зависимости от количества платежей в нем.

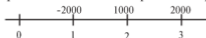
Пусть $\mathfrak{R} = \{R_k, t_k\}$ — поток платежей, в нем R_k — платежи, t_k — моменты времени. Кроме того, предполагается, что известна ставка процента i , обычно неизменная в течение всего потока.

Величиной потока в момент T называется сумма платежей потока, дисконтированных к этому моменту — $\mathfrak{R}(T) = \sum_k R_k (1+i)^{T-t_k}$.

Достаточно найти величину потока в какой-то момент $\mathfrak{R}(T)$, тогда в любой другой момент T' величина потока $\mathfrak{R}(T') = \mathfrak{R}(T)(1+i)^{T'-T}$.

Величина $\mathfrak{R}(0)$ называется *современной величиной потока*; если есть последний платеж, то величина потока в момент этого платежа называется *конечной величиной потока*.

Пример 1. Пусть поток есть $\mathfrak{R} = \{(-2000, 1); (1000, 2); (2000, 3)\}$.
Найдем характеристики этого потока при ставке процента $i = 10\%$.



Сначала найдем современную величину потока:
 $\mathfrak{R}(0) = -2000 \cdot (1 + 0,1)^{-1} + 1000 \cdot (1 + 0,1)^{-2} + 2000 \cdot (1 + 0,1)^{-3} =$
 $= -1818,2 + 826,4 + 1502,6 = 510,8.$

Теперь можно найти и конечную величину потока:
 $\mathfrak{R}(3) = \mathfrak{R}(0) (1 + i)^3 = 679,8.$

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется *рентой*. Если эти платежи также являются одинаковыми. Далее рассматриваются только ренты с одинаковыми платежами.

<http://>

2.2. Конечная годовая рента

Это самая простая рента: в ней только один платеж R в год, длительность ее n лет, годовая процентная ставка i . На рентные платежи начисляются сложные проценты.

Пример 2. Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1000 руб., процентная ставка $i = 10\%$.

Годовые платежи	1000	1000	1000	1000	1000
		1100	2310	3641	5105,1
	0	1	2	3	4
	----- ----- ----- ----- -----				
Всего на счете	1000	2100	3310	4641	6105,1

Поясним движение денежных сумм. В конце 1-го года в банк вносится 1000 руб. В конце 2-го года эта сумма возрастает до 1100 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом в 1000 руб. на счете уже 2100. В конце 3-го года эта сумма возрастает до 2310 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом на счете теперь уже 3310 руб. и т.д. Нарощенная сумма ренты равна 6105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6105,1. Получаем $6105,1/1,1^5 = 3791$.

Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то рента называется *постнумерандо*, в начале — *пренумерандо*. Рассматриваемая в примере рента постнумерандо. В дальнейшем рассматриваются только такие ренты.

Изучим подробно конечную годовую ренту $\{R, n, i\}$ в общем виде:



Главная задача — найти современную величину этой ренты. Имеем $A = R/(1+i) + R/(1+i)^2 + \dots + R/(1+i)^n = R[(1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-n}]$.

В квадратных скобках стоит сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $(1+i)^{-1}$ и знаменателем $(1+i)^{-1}$. Как известно, сумма n членов геометрической прогрессии с

Узнайте стоимость

написания студенческой

первым членом b_1 и знаменателем q равна $b_1(q^n - 1)/(q - 1)$ или $(b_n q - b_1)/(q - 1)$. Следовательно, сумма в квадратных скобках есть $[1 - (1 + i)^{-n}]/i$. И потому современная величина ренты есть

$$A = R \frac{[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}.$$

Величина $[1 - (1 + i)^{-n}]/i$ обозначается $a(n, i)$ и называется *коэффициентом приведения ренты*. С учетом этого обозначения имеем

$$A = R \cdot a(n, i).$$

Зная современную величину ренты, можно легко найти конечную ее величину, которая называется еще *наращенной величиной ренты* S :

$$S = A(1 + i)^n,$$

или

$$S = R \cdot a(n, i)(1 + i)^n = R [(1 + i)^n - 1]/i.$$

Величина $[(1 + i)^n - 1]/i$ обозначается $s(n, i)$ и называется *коэффициентом наращивания ренты*. С учетом этого обозначения имеем

$$S = R \cdot s(n, i).$$

Величины $a(n, i)$ и $s(n, i)$ связаны очевидным соотношением:

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot (1 + i)^n,$$

или

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot M(n, i).$$

Коэффициент наращивания $s(n, i)$ показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше ее годового платежа. Аналогичный смысл имеет и коэффициент приведения ренты: он показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее годового платежа. Можем дать другое толкование смысла понятия «современная величина ренты»: если в момент 0 положить в банк современную величину ренты под i процентов годовых, то к концу n -го года она вырастет до наращенной величины ренты S . Итак, имеем формулы для конечной годовой ренты

$$A = R \cdot a(n, i), \quad S = R \cdot s(n, i). \quad (2.1)$$

Эти формулы формально имеют смысл и для нецелых n . При этом надо использовать определяющие формулы для $a(n, i)$ и $s(n, i)$.

Ниже приведены фрагменты таблиц коэффициентов приведения и наращивания годовой ренты. Таблицы большого объема приведены соответственно в приложениях 3 и 4.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Коэффициенты приведения годовой ренты $a(n, i) = [1 - (1 + i)^{-n}] / i$

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2,829	1,775	2,723	2,683	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444
4	3,717	3,630	3,546	3,463	3,381	3,312	3,240	3,170	3,102
5	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696
6	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231
7	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712
8	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146
9	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537
10	8,530	8,110	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889

Коэффициенты наращенная годовая рента $s(n, i) = [(1 + i)^n - 1] / i$

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342
4	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710
5	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228
6	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913
7	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783
8	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	11,859
9	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,164
10	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	16,722

Применение коэффициентов приведения и наращенная по-кажем на примере.

Пример 3. Найти современную и наращенную величины годовой ренты с $R = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$.

Находим по таблицам $a(8, 8) = 5,747$, $s(8, 8) = 10,637$. Значит, современная величина ренты равна 5747, наращенная — 10,637. Для контроля посмотрев в таблицу мультиплицирующих множителей, находим $M(8, 8) = 1,851$.

Проверка: $5747 \cdot 1,851 = 10\,638$.

2.3. Определение параметров годовой ренты

Выше уже сказано, что годовая рента характеризуется годовым платежом R , длительностью n лет и процентной ставкой i . Процентная ставка обычно неуправляема, но зато к параметрам можно причислить современную величину A и наращенную величину S . Все эти величины не являются независимыми, поэтому если задать некоторые из них, то остальные можно определить:

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

1) если заданы R, n, i , тогда $A = R \cdot a(n, i)$, $S = R \cdot s(n, i)$;

2) если заданы R, S, i , тогда для определения n имеем уравнение $A = R[1 - (1+i)^{-n}]/i$ и получаем $n = -\ln(1 - Ai/R)/\ln(1+i)$. Если последнее выражение не целое, то n определяется как ближайшее целое к нему, смотря по конкретным требованиям. Можно обойтись и без нахождения n по указанной выше громоздкой формуле.

Имеем $a(n, i) = A/R$, затем подбираем по таблице коэффициентов приведения ренты приблизительно подходящее n (учитывая, что i известно).

Пример 4. Пусть $R = 1000$, $i = 8\%$. Найти длительность ренты с современной величиной $A = 4000$.

Решение. Имеем $a(n, 8) = A/R = 4$. По таблице коэффициентов приведения ренты находим, что $a(5, 8) = 3,993$. Значит, приблизительно $n = 5$.

Продолжаем исследование по определению параметров ренты:

3) заданы R, S, i — действуем аналогично предыдущему случаю;

4) заданы A, n, i , тогда для определения R имеем уравнение $A = R \cdot a(n, i)$, причем последняя величина известна, значит, $R = A/a(n, i)$;

5) заданы S, n, i — действуем аналогично п. 4;

6) хотя процентная ставка неуправляема организатором ренты, можно задуматься о желаемой процентной ставке. То есть пусть заданы R, A, n , надо подобрать процентную ставку i . Это посложнее, чем в предыдущих задачах. Для определения i имеем уравнение $A = R[1 - (1+i)^{-n}]/i$, но решить это уравнение аналитически невозможно, приходится применять приближенные методы. Однако, имея под рукой компьютер, несложно составить простую программу для приближенного определения i .

Заметим сначала, что величина $[1 - (1+i)^{-n}]/i$ равна примерно n при малых i и затем уменьшается при росте i (ведь эта величина есть сумма $[1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \dots + 1/(1+i)^n]$, отсюда вытекает, что при $A/R \geq n$ уравнение решений не имеет, т.е. нужной ставки i не существует. Если же $A/R < n$, то из указанного выше вытекает, что нужная ставка i найдется и ее можно найти итеративным путем.

Будем увеличивать i в цикле с малым шагом и анализировать соотношение $A/R < [1 - (1+i)^{-n}]/i$. Сначала, при малых i , это неравенство будет верным, затем оно перестанет выполняться. Как только это произойдет, значит, приблизительно нужная ставка найдена.

Узнайте стоимость

написания студенческой

2.4. Рента конечная общая — платежи

и начисление процентов несколько раз в году

работы на заказ

Пусть платежи выплачиваются p раз в году через равные интервалы и суммарный годовых платеж равен R , так что единичный платеж равен R/p ; проценты начисляются m раз в году также через равные интервалы. Рассмотрим подробно 1-й год.



Рисунок отражает ситуацию при $p = 3$, $m = 2$ (платежи вносятся в моменты, обозначенные «*», начисления процентов происходят в моменты «+» и в конце года.

Необходимы некоторые уточнения. В очередной момент начисления проценты начисляются по ставке сложных процентов на каждый более ранний платеж с учетом момента его поступления. Так как k -й платеж отстоит от конца на $(n - k/p)$ лет, то на него будет произведено $[(n - k/p)m]$ начислений по полной ставке i/m ($[a]$ — целая часть a) и, возможно, еще одно начисление по неполной ставке, и его частичный вклад в наращенную сумму ренты составит $S_k = (R/p) \cdot (1 + i/m)^{(n-k/p)m}$. Сумма всех таких частичных вкладов и составляет наращенную сумму ренты

$$S = \sum_{k=1}^{np} S_k = \sum_{k=1}^{np} (R/p) (1 + i/m)^{(n-k/p)m}.$$

Изменяя порядок суммирования, сумму можно записать так:

$$S = \sum_{k=0}^{np-1} (R/p) (1 + i/m)^{\frac{m}{p} k}.$$

Ясно, что слагаемые этой суммы члены геометрической прогрессии с первым членом R/p , знаменателем $(1 + i/m)^{m/p}$ и числом членов np . Значит, их сумма равна

$$S = (R/p) \frac{(1 + i/m)^{nm} - 1}{(1 + i/m)^{m/p} - 1}.$$

Используя введенные выше обозначения $[(1 + \hat{i})^k - 1]/i = s(k, \hat{i})$, получаем

$$S = (R/p) \frac{s(nm, i/m)}{s(m/p, i/m)}. \quad (2.2)$$

Найдя наращенную величину ренты, без труда можно найти современную величину ренты. Именно:

$$A = S / (1 + i/m)^{nm}.$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Из этой общей формы можно получить формулы для подсчета наращенной величины будущей ренты, когда платежи один раз в году, а проценты начисляются несколько раз, когда, наоборот, начисление процентов только раз в году, а число платежей несколько, и т.п.

Например, пусть p — число платежей в году, а проценты начисляются один раз, т.е. $m = 1$, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = (R/p) \frac{s(n, i)}{s(1/p, i)} \quad \text{и} \quad A = S/(1+i)^n \quad (2.3)$$

Или, пусть в году один платеж ($p = 1$), зато проценты начисляются m раз в году, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = R \frac{s(nm, i/m)}{s(m, i/m)} \quad \text{и} \quad A = S/(1+i/m)^{nm}. \quad (2.4)$$

Весьма часто $m=p$, т.е. число платежей в году и число начислений процентов совпадают, тогда из общей формулы (2.2) получаем

$$S = (R/m) \frac{s(nm, i/m)}{s(1, i/m)} = (R/m) \frac{s(nm, i/m)}{1} = (R/m) \cdot s(nm, i/m). \quad (2.5)$$

Эту формулу, впрочем, легко получить из формулы (2.1) для конечной годовой ренты, положив в ней R/m вместо R с учетом того, что число платежей есть mn , а не n .

2.5. «Вечная» годовая рента

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна, предполагается, что рента будет выплачиваться неограниченно долго. Наращенная величина такой ренты бесконечна, но современная величина равна $A = R/i$. Докажем это.

Современная величина такой ренты есть бесконечный ряд дисконтированных к современному моменту платежей, т.е. $A = R/(1+i) + R/(1+i)^2 + \dots + R/(1+i)^n + \dots = R/i$ (надо использовать сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Впрочем, можно взять формулу (2.1) для конечной годовой ренты:

$$A = R \cdot a(n, i) = R \cdot [1 - (1+i)^{-n}]/i.$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получим $A = R/i$.

Пример 5. Бизнесмен арендовал виллу за \$10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Решение: Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна $A = R/i = \$200\,000$. Между прочим, это в точности годовые процентные деньги, которые стали бы получать арендодатель в $\$200\,000$, помещенных в банк под упомянутую процентную ставку. <http://>

2.6. Объединение и замена рент

Общее правило объединения рент очень просто: находятся современные величины рент-слагаемых и складываются, а затем подбирается рента-сумма с такой современной величиной и нужными остальными параметрами.

Пример 6. Найдем ренту-сумму для двух годовых рент: одна длительностью 5 лет с годовым платежом 1000, и другая — 8 и 800. Годовая ставка процента 8%.

По таблицам находим коэффициенты приведения: $a(5, 8) = 3,993$, $a(8, 8) = 5,747$. Далее, $A_1 = 1000 \cdot 3,993 = 3993$, $A_2 = 800 \cdot 5,747 = 4598$.

Значит, у ренты-суммы современная величина $A = 8591$.

Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем второй из этих параметров определится. Такие задачи рассмотрены в § 2.3.

Примерно так же решается и вопрос о замене данной ренты другой с измененными параметрами: находится современная величина данной ренты, а затем подбирается рента с такой современной величиной и нужными параметрами.

2.7. Дюрация потоков платежей

Пусть i и $\mu = (1 + i)$ — процентная ставка и коэффициент наращивания соответственно. Пусть $\mathfrak{R} = (R_k, t_k)$ — поток платежей, R_k — величина платежа в момент t_k . Обозначим A современную величину этого потока: $A = \sum_k A_k$, где $A_k = R_k \exp(-t_k \ln \mu)$ есть современная величина k -го платежа.

Определение. Дюрацией потока платежей \mathfrak{R} называется эластичность современной величины потока по коэффициенту наращивания $E_\mu^A = (dA/d\mu) : (A/\mu)$, взятая со знаком «минус».

Обозначается $\text{Dur}(\mathfrak{R})$, итак $\text{Dur}(\mathfrak{R}) = -E_\mu^A$.

Напомним определение эластичности. Пусть x — величина-аргумент, y — величина-функция от x , тогда эластичностью y по отношению к x в точке x_0 называется предел

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

отношения относительного изменения величины y к относительному изменению величины x , т.е.

$$(\Delta y / y_0) : (\Delta x / x_0) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0; \text{ обозначается } E_x^y(x_0);$$

таким образом,

$$E_x^y(x_0) = (dy / y_0) / (dx / x_0) = (dy / dx) : (y_0 / x_0) = y'(x_0) x_0 / y_0.$$

Так что, если $E_x^y = -2$, то при увеличении x на 1% y уменьшается на 2%. Итак, дюрация характеризует чувствительность современной величины потока к изменению коэффициента наращения, — если дюрация потока равна 2, то при увеличении коэффициента наращения на 1% современная величина потока уменьшается на 2%. Ясно, что дюрация является одной из важнейших характеристик потока платежей.

Найдем дюрацию потока платежей \mathfrak{R} , продифференцировав современную величину потока по коэффициенту наращения. Итак,

$$dA / d\mu = d \left(\sum_k R_k \exp(-t_k \ln \mu) \right) / d\mu = \sum_k (-t_k R_k \exp((-t_k - 1) \ln \mu)),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} E_\mu^A &= (dA / d\mu) : (A / \mu) = \left(\sum_k -t_k R_k \exp((-t_k - 1) \ln \mu) \right) : (A / \mu) = \\ &= -\sum_k t_k (R_k \exp(-t_k \ln \mu) / A) = -\sum_k t_k (A_k / A) = -\text{dur}(\mathfrak{R}). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } \text{dur}(\mathfrak{R}) = \sum_k t_k (A_k / A).$$

Предположим теперь, что все платежи неотрицательны, тогда все величины A_k также неотрицательны и их сумма в точности равна A , так что сумма всех величин A_k / A равна 1. Поэтому отношения A_k / A можно трактовать как вероятности, а величину $\sum_k t_k (A_k / A)$ — как средний момент платежей в следующем смысле: определим случайную величину (с.в.) T как дискретную, такую, что

$$P(T = t_k) = A_k / A,$$

тогда ее математическое ожидание $\bar{T} = M[T] = \sum_k t_k (A_k / A)$ равно, как легко видеть,

$$\sum_k t_k (A_k / A) = \text{Dur}(\mathfrak{R}).$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Итак, имеем следующий вывод: *средний момент платежа и дюрация потока неотрицательных платежей равны.*

Поясним как содержательно понять, что такое *средний момент платежа*.

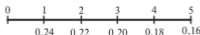
<http://>

Поместим в мешок денежные суммы A_k в рублевых купюрах (предположим, что все эти суммы — целые числа) и на каждой купюре, входящей в сумму A_k , напишем t_k . Встряхнем мешок, чтобы купюры перемешались. Вытащим одну купюру и прочтем, какое t_k на ней написано. Очевидно, что полученная с.в. и есть T , а ее математическое ожидание или среднее значение и есть дюрация.

Теперь можно сказать, что если дюрация потока равна 2, то при увеличении коэффициента наращенения на 1% *средний момент платежа* увеличивается на 2%. Очевидно, что эластичность современной величины потока неотрицательных платежей по коэффициенту наращенения отрицательна, так что дюрация такого потока положительна.

З а м е ч а н и е. «Вероятности» A_k/A можно найти, дисконтируя платежи не обязательно к начальному моменту, а к любому моменту времени, так как эти отношения одинаковы. В частности, если у потока есть наращенная величина, то платежи можно дисконтировать к конечному моменту потока, даже к ∞ .

Для иллюстрации найдем дюрацию 5-летней ренты с годовым платежом $R = 1000$ руб. и годовой процентной ставкой $i = 10\%$. Случайная величина T имеет ряд распределения:



Поясним, как получились вероятности 0,24 и т.д. Нарощенная величина ренты равна 6105 руб., а наращенные величины платежей, т.е. дисконтированных к концу 5-го года, равны соответственно 1464, 1331 и т.д., так что $1454/6105 = 0,24$ и т.д. Вычисляя дюрацию как математическое ожидание с.в. T , получим:

$$1(0,24) + 2(0,22) + \dots = 2,8.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Укажите соотношение между современной и конечной величинами потока.

2. Найдите современную и наращенную величины потока $\{(-2000,1); (1000,2); (1000,3); (1000,4)\}$ при $i = 5\%$.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

3. Семья хочет накопить \$12 000 на машину, вкладывая в банк \$1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?

4. Семья хочет через 6 лет купить дачу за \$12 000. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить \$12 000, если годовая ставка процента в банке 8%?

5. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода 7% по схеме сложных процентов. Сколько будет на счете через 4 года?

6. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру \$500 в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют каждые полгода 4% по схеме сложных процентов. Сколько накопится на счете через 5 лет?

7. В ходе судебного заседания выяснилось, что г. N недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние 2 года налоги вместе с процентами (3% ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г. N?

8. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине Пенсионного фонда г. N в течение 10 лет недоплачивали 100 руб. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить все недоплаченные деньги с процентами (12% годовых). Какова сумма выплаты?

Р е ш е н и е. Искомая сумма есть наращенная величина ренты с единичным платежом 100 руб. и числом платежей 120. Не совсем понятно, как часто начислять проценты и какие. Если применить формулу (2.5), то искомая сумма будет $100 \cdot s(120, 1)$. Но в таблице коэффициентов наращенная ренты не найдем $s(120, 1)$. Придется вычислить эту величину напрямую: $s(120, 1) = [(1 + 0,01)^{120} - 1]/0,01 \approx (e^{1,2} - 1)/0,01 = 230$.

Итак, надо выплатить примерно 23 000 руб.

9. Замените годовую ренту с годовым платежом \$600 и длительностью 10 лет семилетней годовой рентой. Ставка процента 8% в год.

10. Замените годовую десятилетнюю ренту с годовым платежом \$1000 на ренту с полугодовым платежом по \$600. Годовая ставка процента 8%.

11. Сын в банке имел на счете 50 000 руб., на которые ежемесячно начислялись 0,8%. Сын уехал в десятилетнюю командировку за границу, доверив отцу за 10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец?

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

12. Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи: 1) \$5000 немедленно и затем по \$1000 в течение 5 лет; 2) \$8000 немедленно и по \$500 в течение 5 лет. Какой вариант выгоднее при годовой ставке процента: а) 10%, б) 5%.

13. Рассмотрим годовую ренту при $n = 10$, $i = 10\%$. Что более увеличит наращенную величину ренты: увеличение длительности на 1 год или увеличение процентной ставки на 1%?

14. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью 8 лет, чтобы ее современная величина была 16 000 д.е. при ставке 10%?

15. Докажите, что наращенная величина годовой ренты всегда больше ее современной величины.

16. Может ли современная величина конечной годовой ренты быть меньше ее годового платежа?

17. Убедитесь, что и современная величина ренты, и наращенная линейно зависят от величины годового платежа. Как в связи с этим можно переформулировать смысл коэффициентов приведения и наращения ренты?

У к а з а н и е. Сформулируйте смысл этих величин применительно к единичному годовому платежу.

18. В потоке платежей разрешается переставлять платежи. Как их надо переставить, чтобы поток имел самую большую современную величину? Имеет ли это какое-нибудь практическое значение?

19. Рассмотрим вечную ренту с годовым платежом R при ставке процента i . Известно, что ее современная величина, т.е. в момент 0, равна R/i . Найдите ее величину в произвольный момент $t > 0$. При каком t эта величина максимальна, минимальна?

20. Рассмотрим вечную ренту с годовым платежом R . Что более увеличит современную величину этой ренты: увеличение R на 1% или уменьшение i на 1%?

21. Увеличится ли современная величина вечной ренты, если платежи сделать в два раза чаще, но годовую процентную ставку в два раза уменьшить?

22. Проведите детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом $R = 1000$ д.е. и переменной процентной ставкой: 5% в первых 2-х годах, 8% — в 3-м, 10% — в 4-м году. Как здесь определить современную величину этой ренты?

23. Для ренты с параметрами: годовая ставка процента — 12%, годового платежа — 400 д.е., длительность ренты — 6 лет, с

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

помощью компьютера получены следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращивания — 4,11 и 8,12; современная и наращенная величины — 1644,6 и 3246,1.

Проверьте компьютерные расчеты <http://>

24. Для ренты с параметрами: годовой платеж — 400 д.е., длительность ренты — 4 года, современная величина — 1200 д.е. с помощью компьютера найдена необходимая ставка процента — 13% годовых и заодно получены следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращивания — 2,97 и 4,85; наращенная величина — 1939,9.

Проверьте компьютерные расчеты.

25. Найдите дюрацию «вечной ренты» (см. п. 2.5).

26. В потоке платежей разрешается переставлять платежи. Как их следует переставить, чтобы поток имел самую малую дюрацию? Имеет ли это какое-нибудь практическое значение?

27. Меняется ли дюрация при замене одной ренты другой? (См. п. 2.6 и задачи 9, 10.)

28. Найдите дюрацию простейшего потока платежей.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 3 работы на заказ КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ <http://>

Заем, кредит, ссуда — древнейшие финансовые операции. По-латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «кредит» ударение на втором слоге («кредит») с ударением на первом слоге — это правая часть бухгалтерских проводок).

Все три слова — «заем», «кредит», «ссуда» — означают одно и то же — предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется займодавцем (кредитор), кто берет — заемщик (или дебитор). Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Здесь рассмотрены лишь самые простые и наиболее распространенные способы погашения займов.

3.1. Погашение займа одним платежом в конце

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n -го года наращенная его величина станет $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа. Для облегчения расчетов можно использовать таблицу мультиплицирующих множителей.

Пример 1. Заем величиной 20 000 руб. был выдан на 8 лет под 10% годовых. Если отдать этот заем одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение. По таблице мультиплицирующих множителей находим $M(8, 10) = 2,144$. Значит, искомый платеж равен 42 880 руб.

3.2. Погашение основного долга одним платежом в конце

Сам заем называется *основным долгом*, а наращиваемый добавок — *процентными деньгами*. Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят iD . Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D . И так будем выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги iD . В конце n -го, последнего, года выплаты составят величину $iD + D$ — процентные деньги за последний год и основной долг.

Узнайте стоимость

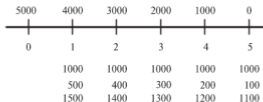
написания студенческой

3.3. Погашение основного долга равными

ГОДОВЫМИ РЕНТАМИ РАБОТЫ НА ЗАКАЗ

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается n -я доля основного долга, т.е. величина D/n . В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы D , которой пользовались в течение этого года, т.е. еще iD . Весь платеж в конце 1-го года равен $R_1 = D/n + iD$. В конце 2-го года выплата составит $R_2 = D/n + i(D - D/n)$ и т.д., так что в конце $(k+1)$ -го года платеж $R_{k+1} = D/n + i(D - kD/n)$. Легко видеть, что платежи R_1, R_2, \dots образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью iD/n , первым членом $R_1 = D/n + iD$ и последним $R_n = D/n + iD/n$.

Пример 2. Пусть $D = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Выплаты показаны на рисунке внизу, а остатки в конце-начале года — вверху.



3.4. Погашение займа равными годовыми выплатами

Пусть заем D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается одинаковая сумма R . Найти ее просто: эти выплаты можно рассматривать как годовую ренту длительности n лет и годовым платежом R . Приравняем современную величину этой ренты величине займа D . Получим уравнение $D = R \cdot a(n, i)$. Значит, $R = D/a(n, i)$.

Пример 3. Пусть $D = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Из таблицы коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) находим $a(5, 10) = 3,791$. Значит, $R = 5000/3,791 = 1319$.

3.5. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год

Для расчета используем прием из предыдущего параграфа. Пусть выплаты размером y производятся m раз в году, всего вы-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

плат nm . На эти выплаты начисляются проценты также m раз в году по ставке i/m (обычно считают, что выплаты идут в тот же банк, который дал заем, и там начисляют на них проценты). Эти выплаты образуют соответствующий ренту, наращенная величина которой есть $S = y \cdot s(nm, i/m)$ — см. также формулу (2.5). Наращенная величина займа есть $D(1 + i/m)^{nm}$ и, приравнявая, получим уравнение для определения y :

$$D(1 + i/m)^{nm} = y \cdot s(nm, i/m),$$

откуда

$$y = D \cdot (1 + i/m)^{nm} / s(nm, i/m).$$

3.6. Общий метод погашения займа

Пусть заем величиной D выдан на n лет под i сложных годовых процентов. В общем случае погашающие платежи — это сумма платежей D_k , идущих на выплату основного долга D , и платежей I_k , идущих на выплату процентных денег, начисляемых на остаток основного долга после предыдущего платежа. Такой метод позволяет планировать различные схемы выплат, как уже показано выше в § 3.1—3.5.

Указанное свойство сначала продемонстрируем на частном случае.

Пусть заем выдан сроком на 2 года. В конце первого года было выплачено в счет оплаты основного долга D_1 и на весь долг D , которым пользовались в течение года, начисленные проценты $I_1 = iD$ тоже были выплачены, так что в конце первого года суммарный платеж составил $D_1 + iD$. В конце второго года был выплачен остаток основного долга $D_2 = D - D_1$ и проценты за этот год, равные iD_2 , так что суммарный платеж составил $D - D_1 + i(D - D_1)$. Деньги $D_1 + iD$, выплаченные в конце первого года, за второй год выросли до $(D_1 + iD)(1 + i)$. В итоге за оба года было выплачено с учетом процентов, начисленных за платеж в конце первого года, $(D_1 + iD)(1 + i) + (D - D_1)(1 + i) = (1 + i)(D_1 + iD + D - D_1) = D(1 + i)^2$, что совпадает с наращенной суммой займа за два года.

Докажем теперь рассматриваемое свойство потока погашающих платежей в общем виде. Пусть D_1, \dots, D_n — платежи, идущие на выплату основного долга D , I_1, \dots, I_n — платежи, идущие на выплату процентных денег, начисляемых на остающийся основ-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ной долг. Выделим в потоке погашающих платежей две части: по завершающему платежу D_n и процентному вылату по нему:

$$\begin{aligned} & iD_n(1+i)^{n-1} + iD_n(1+i)^{n-2} + \dots + iD_n \\ & = iD_n[(1+i)^{n-1} + \dots + 1] + D_n = iD_n \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + D_n = D_n(1+i). \end{aligned}$$

Для второй части, т.е. для последовательности долговых уплат $\{D_k, k = 1, \dots, n-1\}$ в силу индукции эквивалентная ей на момент $(n-1)$ наращенная сумма равна $(D - D_n)(1+i)^{n-1}$, и в конце n -го года нарастет до величины $(D - D_n)(1+i)^n$. Складывая обе наращенные суммы, получим $D_n(1+i)^n + (D - D_n)(1+i)^n = D(1+i)^n$, что совпадает с наращенной величиной займа.

Рассмотренные выше в § 3.1–3.5 методы погашения займа являются частными случаями только что описанного общего метода.

3.7. Формирование погасительного фонда по более высоким процентам

Взятый заем может погашаться разными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить заем единым платежом в конце срока займа. Понятно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда большие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Пусть заем размером D взят в начале года на n лет под ставку i сложных процентов в год, тогда к концу n -го года он вырастет до $D(1+i)^n$. Платежи в погасительный фонд образуют ренту с годовым платежом R и годовой ставкой сложных процентов $g > i$. Тогда в фонде к концу n -го года накопится сумма $R \cdot s(n, g) = R[(1+g)^n - 1]/g$, из которой и будет погашен заем в $D(1+i)^n$.

Пример 4. Пусть $D = 900$, $i = 4\%$, $g = 8\%$, $n = 10$. После подсчетов получаем, что ежегодный платеж в погасительный фонд равен 92, тогда к концу 10-го года в погасительном фонде накопится сумма 1332,2 — это наращенная величина займа.

3.8. Потребительский кредит и его погашение

При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

А. Погашение равными выплатами. Пусть кредит размером D взят на n лет, годовая ставка простых процентов i , следовательно, всего надо вернуть выплат на сумму $D(1 + ni)$. Если в год предусмотрено (договором) m выплат, то одна выплата равна $D(1 + ni)/nm$.

Интересно узнать ставку сложного процента, по которой современная величина выплат по кредиту равна его номинальной величине. Обозначим ее j . Имеем уравнение

$$[D(1 + ni)/nm]a(mn, j/m) = D, \text{ или } (1 + ni) = mn \cdot a(mn, j/m).$$

Его нетрудно решить приближенно с помощью таблиц (см. задачу 5 в конце главы).

Б. Правило 78. При этом способе основной долг D выплачивается равными долями, а процентные деньги в размере niD — выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, и последняя выплата равна разности этой прогрессии. Если в год предусмотрено m выплат (например, 12 — при ежемесячных выплатах), то самая последняя выплата равна d — неизвестной пока разности прогрессии, а первая — mnD . Но сумма всех этих выплат $d + 2d + \dots + mnd = (1 + mn) mnd/2$ должна быть равна процентным деньгам, т.е. $(1 + mn) mnd/2 = niD$, откуда можно найти d и все выплаты процентных денег.

Практически делают так. Считают сумму номеров всех выплат $N = (1 + 2 + \dots + mn) = (1 + mn) mn/2$ и делят процентные деньги на N частей; далее 1-й платеж равен mn таких частей, 2-й платеж будет на одну часть меньше и т.д., последний платеж равен ровно одной части. Сумма номеров месяцев в году $1 + 2 + \dots + 12$ равна 78, отсюда и название этого правила.

3.9. Льготные кредиты

Льготный кредит выдают по льготной ставке, меньшей обычной ставки. Фактически тем самым заемщик получает субсидию, которую рассчитывают как разницу соответствующих современных сумм.

Пусть кредит размером D выдан на n лет по льготной ставке g , меньшей обычной ставки i , и будет погашаться равными выплатами. Эти выплаты образуют годовую ренту. Обозначим размер одной выплаты y , тогда современная величина этой ренты равна $y \cdot a(n, g)$. Отсюда найдем: $y = D/a(n, g)$. А если бы выплаты шли по обычной ставке i , то размер каждой выплаты был бы $z = D/a(n, i)$. Разность $z - y = D/a(n, i) - D/a(n, g)$ — это ежегод-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ные потери кредитора, а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке i , т.е. $(s - i) \cdot a(n, i) = [D/a(n, i) - D/a(n, g)] a(n, i) = D \cdot [1 - a(n, i)/a(n, g)]$ и есть субсидия кредитора заемщику. Эта субсидия называется еще *абсолютным грант-элементом*, а величина $1 - a(n, i)/a(n, g)$ — *относительным грант-элементом*. Нарощенная сумма абсолютного грант-элемента или, что то же самое, наращенная сумма субсидии называется *общими потерями кредитора*.

Пример 5. Пусть $D = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$, $g = 5\%$. Находим выплаты по обычной ставке из уравнения: $y \cdot a(8, 8) = 1000$, по таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) находим: $a(8, 8) = 5,747$; отсюда $y = 174$. Выплаты по льготной ставке находим из уравнения: $z \cdot a(8, 5) = 1000$, по той же таблице находим: $a(8, 5) = 6,463$; отсюда $z = 155$. Следовательно, ежегодные потери кредитора равны 19. Подсчитаем относительный и абсолютный грант-элементы (последний, напомним, есть субсидия кредитора заемщику): $1 - a(n, i)/a(n, g) = 1 - 5,747/6,463 = 0,108$; $1000 \cdot 0,108 = 108$. Наконец, общие потери кредитора $108 \cdot (1 + 0,08)^8$, по таблице мультиплицирующих множителей (см. приложение 1) находим $(1 + 0,08)^8 = 1,851$. Следовательно, общие потери кредитора равны 200.

3.10. Погашение традиционной ипотечной ссуды

Такая ссуда выдается на 10—30 лет под небольшие проценты. Обычно ее выдают под залог имущества (земли, дома и т.п.). В случае невозврата ссуды в установленный срок заложенное имущество становится собственностью кредитора. Традиционная ипотечная ссуда погашается равными ежемесячными выплатами, на которые ежемесячно же начисляются проценты.

Пусть номинальный размер ссуды D , выдана она на срок n лет под годовую ставку сложных процентов i . Равные ежемесячные выплаты размером y образуют ренту с частотой платежей и начислением процентов 12 раз в году. Следовательно, ее наращенная величина к концу k -го года составит $y \cdot s(12k, i/12)$ и для определения y имеем уравнение $y \cdot s(12n, i/12) = D(1 + i/12)^{12n}$.

Традиционно определяют на конец любого года и остаток, который еще предстоит выплатить. Определим остаток r_k на конец k -го года. К концу k -го года наращенная величина выданной ссуды есть $D(1 + i/12)^{12k}$, а наращенная величина ренты выплат есть $y \cdot s(12k, i/12)$ и, значит, остаток r_k есть $D(1 + i/12)^{12k} - y \cdot s(12k, i/12)$.

Пример 6. Пусть ссуда в \$100 000 выдана на 20 лет под 3% годовых. Определим ее основные характеристики.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Решение. Некоторая трудность расчетов состоит в том, что мультиплицирующий множитель $M(240, 3/12)$ а также коэффициент наращеня $s(240, 3/12)$ нужно считать по формулам, а не находить их в таблицах. Конечно, у практических работников, занимающихся ипотечным кредитованием, таблицы с такими большими параметрами есть. Итак, $M(240, 1/4) = (1 + 0,0025)^{240} = 1,8207$, $s(240, 1/4) = [(1 + 0,0025)^{240} - 1] / 0,0025 = 0,8207 / 0,0025 = 328,28$. Теперь можно определить ежемесячную выплату:

$$y = 100\,000 \cdot 1,8207 / 328,28 = 554,6.$$

Определим теперь остаток, скажем, на конец 10-го года. Нарощенная величина ссуды к этому моменту есть $100\,000 \cdot M(120, 1/4) = 134\,935$, наращенная величина произведенных выплат есть $554,6 \cdot s(120, 1/4) = 77\,488$, так что остаток равен 57 447.

3.11. Замена одного займа другим

Один заем можно заменить другим при условии равенства временных величин потоков выплат по этим займам.

Пример 7. Гражданин Б. в течение 5 лет ежеквартально должен был выплачивать 500 д.е., погашая взятую ссуду. В связи с его отъездом за границу через два года он попросил пересчитать величину ежеквартальной выплаты, чтобы успеть рассчитаться. Ставка процентов в банке — 8% годовых.

Решение. Современная величина текущих выплат $500 \cdot a(20, 8/4) = 500 \cdot 16,351 = 8175,5$. Поэтому искомым ежеквартальным платеж R должен удовлетворять уравнению $R \cdot a(8, 8/4) = 8175,5$, откуда $R = 8175,5 / 7,325 = 1116,1$ д.е.

3.12. Объединение займов

Используя ту же идею, что и в § 3.11, можно несколько займов объединять в один. Сначала находят современные величины остатков займов, потом эти величины складывают и получают современную величину займа-объединения.

Теперь можно подобрать параметры нового займа, устраивающие кредитора и заемщика.

3.13. Предоставление в кредит активов

Актив — это наличные товары, ценные бумаги, валюта и т.п. В целом под активом можно понимать любой товар в широком экономическом смысле. Активы, как правило, приносят некоторый доход их владельцу. Доходность актива выражают в процентах годовых от цены актива на начало года. Активы также можно отда-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

вать в кредит, но расчеты при этом значительно усложняются. Одна из причин в том, что эти активы со временем теряют свои качества, из-за которых они ценятся. Учитывая это, владелец должен требовать большую процентную ставку.

З а м е ч а н и е. Между кредитором и заемщиком существует эквивалентность финансовых обязательств. Если обратить платежи, то современные или наращенные суммы потоков платежей одинаковы (или эквивалентны — в смысле математической эквивалентности — см. § 1.6).

Рассмотрим, например, уплату займа равными годовыми выплатами (см. § 3.3). Кредитор дал займы сумму P под $i\%$ годовых и получал в конце каждого года определенную сумму. Но можно сказать и по-другому: заемщик дает кредитору эти годовые выплаты в долг, а в конце n -го года кредитор возвращает сумму с наращенными процентными деньгами. В случае погашения займа одним платежом в конце срока займа (см. § 3.1) аналогичное рассуждение таково: заемщик дает кредитору наращенную сумму в долг в будущем, а сейчас кредитор возвращает ему эквивалентную сумму. Рассмотренная эквивалентность есть частное проявление общей идеи эквивалентности финансовых обязательств сторон при заключении финансовых сделок.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Для кого выгодна инфляция: для кредиторов или заемщиков?

2. Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. в течение двух лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

Р е ш е н и е можно предложить следующее. Оставалось выплатить $500 \cdot a(8, 16/4) = 500 \cdot 6,733 = 3367$. Следовательно, новый размер выплаты должен быть $R \cdot a(8, 6/4) = 3367$, отсюда $R = 3367/7,486 = 450$.

3. Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, рассчитанный с помощью компьютера:

	Процентная годовая ставка 8%		Величина займа 600		
Уплаты	168,0	158,4	148,8	139,2	129,6
Годы	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й

4. С помощью компьютера найден размер годовой уплаты 200,4 д.е. при погашении займа 800 д.е. равными годовыми упла-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

тами, заем выдан на 5 лет при годовой ставке 8%. Проверьте компьютерные расчеты.

5. На покупку дачного домика взят потребительский кредит 40 000 руб. на 8 лет под 8 процентов годовых. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти размер этой выплаты.

Решение. Всего нужно выплатить $40\,000 \cdot (1 + 0,08) = 65\,600$. Следовательно, ежеквартальная выплата равна $65\,600/32 = 2050$. Найдем еще ставку сложных процентов j такую, чтобы современная величина потока этих выплат была бы равна номинальной величине кредита 40 000: $2050 \cdot a(32, j/4) = 40\,000$, $a(32, j/4) = 40\,000/2050 = 19,51$. По таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) подбором получаем $j/4 \approx 3,5\%$, т.е. $j = 14\%$. Итак, кредит выдан фактически под 14 годовых сложных процентов.

6. Магазин продает телевизоры в рассрочку на 1 год. Сразу же к цене телевизора \$400 добавляют 10% и всю эту сумму надо погасить в течение года, причем стоимость телевизора гасится равномерно, а надбавка — по «правилу 78». Найти ежемесячные выплаты.

Решение. По «правилу 78» надбавка \$40 выплачивается так: в конце 1-го месяца — $12/78$ всей надбавки, т.е. примерно \$6, затем на $1/78$ часть надбавки меньше, т.е. меньше на \$0,5, и т.д. Ежемесячные выплаты (долл.) таковы: 39,3; 38,8; 38,3; ...; 33,8.

7. Кредит \$500 банк дает под 6% годовых, которые сразу же высчитывает. Проанализируйте предыдущую задачу: может быть, лучше взять в банке кредит в \$500?

8. Заем \$5000 взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет равными ежегодными выплатами основного долга. Найдите ежегодные выплаты.

9. Заем 20 000 д.е. взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

10. Заем 20 000 д.е. взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет начиная с конца шестого года ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

11. К категории льготных займов относится беспроцентный заем. Найдите относительный и абсолютный грант-элементы для такого займа при $D = 1000$, $n = 5$, $i = 10\%$.

12. Предложите план погашения займа при переменной процентной ставке.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Глава 4 АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В нормальной экономике вращение внутри самой финансовой сферы не может принести большого дохода. Только выход в реальный сектор экономики путем инвестирования позволит нарастить капитал. Но для этого надо уметь анализировать инвестиционные процессы. Такие процессы — это потоки платежей, в которых инвестиции отрицательны, доходы положительны.

4.1. Пример детального анализа инвестиционного проекта

Пусть в начале года вложены инвестиции размером $Inv = 2000$, а затем в течение 4 лет получены доходы $R_1 = 1000$, $R_2 = 800$, $R_3 = 800$, $R_4 = 600$. Ставка процента 8% в год.

-2000	1000	800	800	600
0	1	2	3	4
	-2160	-1252,8	-489	335,9
	1000	800	800	600
	-1160	-452,8	311	935,9

Поясним рисунок. Наверху указаны размеры инвестиций (отрицательные) и получаемые доходы (положительные). Допустим, доходы вкладываются в тот же банк, который дал инвестиции, и на доходы начисляются те же сложные проценты, под которые банк выдал кредит-инвестиции. Самая верхняя строка под линией — размер счета в банке до внесения очередного платежа-дохода. Следующая строка — этот самый платеж-доход, еще ниже — итоговый размер счета в банке. Итак, -2160 — это наращенная за один год сумма выданных в кредит инвестиций, добавим 1000, получим -1160 — это долг заемщика банку. В конце 2-го года счет в банке еще отрицателен, но в конце 3-го года уже положителен — 311. Значит, за 3 года инвестиции окупились, так что срок окупаемости проекта равен 3 годам. К концу 4-го года счет в банке положителен — это наращенная величина чистого дохода. Если эту величину дисконтировать к моменту 0 по ставке 8%, то получим $935,9/(1 + 0,08)^4 = 935,9/1,360 = 688,2$. Эта величина называется

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

приведенным чистым доходом проекта. Если ее поделить на абсолютную величину инвестиций, то получим доходность проекта (иногда эту величину называют рентабельностью проекта): $688,2/2000 = 0,344$, в процентах — 34,4%.

<http://>

4.2. Общие понятия и обозначения

Рассмотрим некоторые общие понятия. Пусть $\{(R_k, t_k)\}$ — инвестиционный процесс — поток платежей R_k в момент t_k , знак платежа R_k имеет значение: если он положителен — это доход, отрицателен — затраты или инвестиции. Все платежи производятся на стыке лет и только в неотрицательные номера лет. Процесс называется *конечным*, если в нем имеется последний платеж, иначе — *бесконечным*.

Приведенным чистым доходом NPV (Net Present Value) называется сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по действующей ставке процента i ,

$$\text{NPV} = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k}.$$

Для конечного процесса можно определить *наращенный чистый доход* — NFV (Net Future Value) — это сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту t_n последнего платежа по ставке процента i ,

$$\text{NFV} = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k - t_n}.$$

Ясно, что $\text{NFV} = \text{NPV} \cdot (1+i)^{t_n}$.

Процесс называется *окупающимся*, если $\text{NPV} > 0$. Впрочем, легко понять, что процесс окупается, если положительна сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к какому-либо моменту времени, так как все такие суммы связаны с NPV или NFV очевидными соотношениями. Доходность процесса можно определить так: надо дисконтировать по ставке i к какому-нибудь моменту все платежи процесса и найти отношение дохода к затратам. Ясно, что если процесс окупается, то его доходность положительна, верно и обратное.

Далее будем рассматривать только процессы, у которых инвестиции в момент 0, а все остальные платежи положительны, т.е. это доходы. Для таких процессов интересной характеристикой является внутренняя доходность процесса q — такое наименьшее положительное число, что сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по ставке q , т.е. $\sum_k R_k / (1+q)^{t_k}$, равна 0. Ясно, что если процесс окупающийся, то $i \leq q$. *Внутренняя норма доход-*

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ности показывает предельный уровень ставки процента, при котором взятые по этой ставке инвестиции окупаются доходами процесса (наращиваемыми по той же ставке).

<http://>

4.3. Расчет характеристик конечного проекта с начальными инвестициями и постоянными доходами

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем в течение 10 лет магазин будет давать доход \$3000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение в общем виде: пусть Inv — размеры инвестиции, R — последующий годовой доход в течение n лет, i — ставка процента для инвестиций и доходов. Определить характеристики проекта.

Поток доходов есть конечная годовая рента с годовым платежом R , длительностью n лет. Современная величина этой ренты $A = R \cdot a(n, i)$, где $a(n, i)$ — коэффициент приведения ренты. Значит, приведенный чистый доход проекта есть $NPV = Inv + R \times a(n, i)$, доходность проекта $d = NPV / (-Inv)$. Как определить срок окупаемости?

Если s — срок окупаемости, то s должен быть минимальным из всех таких чисел r , что $Inv + R \cdot a(r, i) \geq 0$ или $a(r, i) \geq -Inv/R$. Но $a(r, i) = [1 - (1 + i)^{-r}] / i$. Решение соответствующего неравенства дает: $r \geq -\ln(1 + i \cdot Inv/R) / \ln(1 + i)$. Внутренняя доходность проекта q должна удовлетворять уравнению $Inv + R \cdot a(n, q) = 0$. Если это уравнение имеет несколько корней, то берут наименьший. С помощью компьютера приближенно решить это уравнение несложно.

Если $-Inv \geq nR$, то указанное выше уравнение решений не имеет, ибо $R \cdot a(n, q) = R/(1 + q) + R/(1 + q)^2 + \dots + R/(1 + q)^n < nR \leq -Inv$. Поэтому пусть $-Inv < nR$. Но теперь ясно, что искомое q существует и его можно найти итеративным процессом, увеличивая q с малым шагом до тех пор, когда неравенство $-Inv < R/(1 + q) + R/(1 + q)^2 + \dots + R/(1 + q)^n$ станет неверным.

Пример 1. Решим задачу, сформулированную в начале этого параграфа. Так как $a(10, 8) = 6,710$, то современная величина потока доходов есть $3000 \cdot 6,710 = 20\,130$, значит, приведенный чистый доход есть $NPV = 20\,130 - 10\,000 = 10\,130$, доходность проекта есть $10\,130 / 10\,000 = 1,031$ — это доля, в процентах 103,1%. Для нахождения внутренней доходности найдем такое q , что $a(10, q) = 10\,000 / 3000 = 3,33$. По таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) подбираем q , получаем $q = 27\%$.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

4.4. Расчет характеристик бесконечного проекта с начальными инвестициями

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем он неограниченно долго будет давать доход \$2000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение. В общем виде решение задачи таково: пусть Inv , R , i — размеры инвестиций, последующего годового дохода и ставка процента. Тогда $NPV = Inv + R/i$, а $d = NPV/(-Inv)$ — доходность проекта. Действительно, поток ежегодных доходов есть вечная рента, ее современная величина — R/i (см. § 2.5). Отсюда и вытекают формулы, приведенные выше для NPV и d . Итак, $NPV = -10\,000 + 2000/0,08 = 15\,000$, $d = 15\,000/10\,000 = 1,5$, или 150%. Найдем внутреннюю доходность проекта: подберем так q , чтобы $R/q = -Inv$ или $q = R/(-Inv) = 2000/10\,000 = 20\%$.

4.5. Определение величины инвестиций

Допустим, разрабатывается инвестиционный проект заданной длительности, с которой совпадает срок окупаемости. Проект должен обеспечивать заданный годовой доход. Найти характеристики данного проекта, прежде всего необходимые начальные инвестиции.

Решение. В общем виде решение задачи таково: пусть R , n , i — размер последующего годового дохода, длительность проекта и ставка процента. Какие нужны для обеспечения этого минимальные инвестиции?

Очевидно, что необходимые инвестиции есть $Inv = -R \cdot a(n, i)$, современная и наращенная величины дохода проекта равны 0, так как срок окупаемости совпадает с длительностью проекта, доходность проекта также равна 0, а внутренняя доходность совпадает со ставкой процента.

4.6. Расчет годового дохода для заданной внутренней доходности проекта

Акционерной компанией разрабатывается инвестиционный проект. Акционеры согласились с предлагаемой длительностью n проекта и с необходимым размером инвестиций Inv , но требуют обеспечить большую доходность j вложения этих инвестиций, чем просто общепринятая ставка процента i . Какой для этого нужно обеспечить минимальный ежегодный доход R ?

Узнайте стоимость

написания студенческой

Решение. Ясно, что ежегодный доход должен удовлетворять уравнению $-Inv = R \cdot a(n, i)$, тем самым $-Inv = R \cdot [1 - (1+i)^{-n}]/i$, откуда $R = (1+i)^n \cdot Inv / [1 - (1+i)^{-n}]$.

работы на заказ

<http://>

4.7. Зависимость характеристик процесса от ставки процента

Рассмотрим процесс со следующими данными: Inv, R, n . Напомним, что современная величина потока доходов $A = R \cdot a(n, i)$, где $a(n, i) = 1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + \dots + 1/(1+i)^n$. Видно, что при увеличении i эта сумма, т.е. $a(n, i)$, уменьшается. Поэтому можно сделать вывод: при увеличении ставки процента приведенный чистый доход $NPV = -Inv + R \cdot a(n, i)$ уменьшается, следовательно, уменьшается доходность процесса, а срок окупаемости увеличивается. Внутренняя доходность процесса не зависит от ставки процента, так как определяется исключительно размером инвестиций и потоком доходов. Таким образом, вполне может быть так, что инвестиционный проект окупается при одной ставке процента и не окупается при большей ставке.

Пример 2. Вот результаты компьютерного исследования проекта со следующими данными: $Inv = -10\,000, R = 2000, n = 10$.

Ставка процента i	6	8	10	12	14	16
Приведенный чистый доход NPV	4720	3420	2289	1300	432	-334
Срок окупаемости	7	7	8	9	10	Не окупается
Доходность проекта d	0,47	0,34	0,33	0,13	0,04	-0,03

Как видим, при ставке $i = 16\%$ проект не окупается. Разумеется, внутренняя доходность проекта равна $\sim 16\%$.

4.8. Сравнение инвестиционных проектов

Наиболее важные характеристики инвестиционных проектов — это приведенный чистый доход NPV, срок окупаемости и внутренняя доходность проекта. Первые две характеристики зависят от ставки процента i , а внутренняя доходность от нее не зависит.

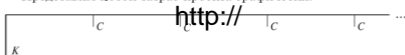
Часто приходится сравнивать инвестиционные проекты, различающиеся по затратам, но тождественные по результатам. Естественно, в такой ситуации оценивать проекты надо по их затратам, причем наряду с капитальными затратами K , осуществляемыми на начальной стадии проекта, надо учитывать и текущие издержки C (на

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ремонт, обновление и т.п.), вообще-то разные по годам, но для упрощения расчетов представим их одинаковыми.

Представим поток затрат проекта графически:



Сравниваем проекты путем подсчета современной величины A_m потока затрат по m -му проекту. Довольно естественно считать этот поток затрат бесконечным и потому

$$A_m = K_m + C_m \cdot v + C_m \cdot v^2 + \dots = K_m + C_m/i,$$

где $v = 1/(1 + i)$ — дисконтирующий множитель по ставке сравнения i .

Из сравниваемых проектов лучшим надо считать тот проект m , у которого современная величина потока затрат $K_m + C_m/i$ наименьшая, что эквивалентно тому, что наименьшей является величина $C_m + i \cdot K_m$. Последняя известна как *показатель приведенных затрат*.

В СССР в качестве ставки сравнения i использовался так называемый нормативный коэффициент эффективности. Для ряда отраслей он был установлен в диапазоне от 0,1 до 0,5, а средний для народного хозяйства составлял 0,15, что предполагало максимально допустимые сроки окупаемости от 2 до 10, а в среднем — около 6 лет.

4.9. Определение размера платы за аренду оборудования

Своеобразным инвестиционным процессом является аренда оборудования. Для владельца оборудования важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи в аренду, для арендатора — решить дилемму: купить оборудование или арендовать его. Первый шаг в решении этих проблем — определение размера арендных платежей.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. К концу этого срока остаточная его стоимость составит S . Таким образом, владелец оборудования «теряет» $P - S/(1 + j)^n$, где $1/(1 + j)$ — коэффициент дисконтирования, приведения суммы S к началу аренды, к расчетному моменту. Величина j может быть отождествлена с доходностью сдачи оборудования в аренду для владельца оборудования. «Потерю» владельцу должен возместить арендатор. Современная величина потока его арендных платежей по ставке j должна быть равна $P - S/(1 + j)^n$, так что размер разо-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

вого годового арендного платежа R может быть определен из уравнения

$$R \cdot a(n, j) = P - S/(1 + j)^n$$

Следовательно, этот годовой арендный платеж $R = [P - S/(1 + j)^n]/a(n, j)$. Ясно, что норматив доходности j должен быть больше нормы амортизации h . Разность $j - h$ в некоторой мере характеризует эффективность сделки.

4.10. Определение нормы доходности от сдачи оборудования в аренду

Для владельца оборудования важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи оборудования в аренду, в частности, доходность (внутренняя норма доходности инвестиционного процесса) должна быть больше нормы амортизации.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Норма амортизации данного типа оборудования равна h процентов в год. Тогда по истечении n лет остаточная стоимость оборудования S равна $P(1 - nh)$.

Предположим, что годовая арендная плата есть R . Тогда норма доходности аренды рассчитывается из уравнения $R \cdot a(n, j) = P - S/(1 + j)^n$.

Ясно, что норматив доходности j должен быть больше нормы амортизации h . Разность $j - h$ в некоторой мере характеризует эффективность сделки.

4.11. Арендовать оборудование или покупать?

Дилемма арендатора: купить оборудование или арендовать его — решается просто (если не рассматривать некоторые дополнительные тонкости аренды): надо сравнить современные величины затрат на покупку оборудования и на его аренду.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Норма амортизации данного типа оборудования равна h процентов в год, тогда по истечении n лет остаточная стоимость оборудования S составит $P(1 - nh)$.

Предположим, что годовая арендная плата есть R . Тогда современная величина арендных платежей при ставке процента i есть $R \cdot a(n, i)$, а современная величина потерь, связанных с покупкой, есть $P - S/(1 + i)^n$. Поэтому, если $R \cdot a(n, i) > P - S/(1 + i)^n$, то надо арендовать оборудование, иначе — покупать его.

З а м е ч а н и е. Во всех приведенных выше расчетах инвестиционных проектов ставка процента предполагалась неизменной. В

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

действительности такое бывает крайне редко. И потому вопрос о выборе подходящей ставки процента становится одним из основных при практической оценке инвестиционного проекта. Какую ставку принять в конкретной ситуации — дело тщательного экономического анализа и прогноза. Чем ставка выше, тем в меньшей мере влияют на судьбу проекта отдаленные по времени платежи. Кроме того, будущее вносит элементы неопределенности, а значит, риска во всем: в величине будущих доходов и в их реальной ценности, ибо инфляция в будущем — вещь в высшей степени неопределенная. Большой риск значительно обесценивает возможные будущие платежи. (Некоторые сведения об этом есть в ч. II пособия.)

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

2. С помощью компьютера рассчитан инвестиционный проект: $Inv = -4000$ д.е., последующий годовой доход при 8% годовых равен $R = 1000$ д.е., длительность проекта 6 лет и получено, что чистый приведенный доход $NPV = 623$ д.е. и срок окупаемости — 6 лет. Проверьте компьютерные расчеты.

3. Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с помощью компьютера найдены необходимые инвестиции — 1742 д.е. Проверьте компьютерные расчеты.

4. Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из десяти она на капитальном ремонте и обновлении, что требует \$30 000, в остальные девять лет цикла фабрика приносит доход \$10 000 в год. Найдите характеристики данного потока платежей. (Уточним, что затраты относятся на конец первого года цикла, доход поступает в конце каждого года цикла, начиная со второго года.)

5. Рассмотрим создание из доходов фонда для погашения кредита инвестиций. В банке взят кредит под инвестиционный проект по ставке i , а доходы от проекта помещаются в другой банк по большей ставке j . Вычислите итоговые характеристики (необходимые данные — по вашему усмотрению).

6. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму и тратя ее в течение года. По сути это «перевернутый» инвестиционный процесс. Введите понятия, аналогичные

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

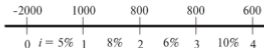
сроку окупаемости, внутренней норме доходности и т.п. Какие меры должен принять инвестор при увеличении темпов инфляции?

7. В городе есть банк, выплачивающий 8% годовых. Как вы объясните, почему автомагазин продает автомобили в кредит под 6% годовых?

8. Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью \$20 000 в течение 10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет \$10 000. Норматив доходности принять равным 15%.

9. Выясните, следует купить оборудование стоимостью \$20 000 или арендовать его на 8 лет с ежегодным арендным платежом \$3000, если ставка процента 6% годовых, а норма амортизации равна 15%?

10. Проанализируйте инвестиционный проект с переменной процентной ставкой:



Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Глава 5

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку — H и K соответственно, а цель проведения которой заключается в максимизации разности $K - H$ или другого подобного показателя. Важнейшей характеристикой операции является ее доходность. В предыдущих главах эпизодически приходилось вычислять доходность. В этой главе подробно рассмотрим это понятие.

5.1. Различные виды доходности операций

Под денежной оценкой начала операции обычно понимают размер вложенных инвестиций, затраты или просто наличный капитал, под денежной оценкой конца операции — наращенный капитал, полученный доход и т.п.

Доходность d операции определяется из уравнения $K = H(1 + d)$ или $d = (K - H)/H = K/H - 1$. Величина K/H называется *коэффициентом*, или *множителем, наращенного*. Ясно, что $K/H = 1 + d$.

Видно, что множитель наращенного и доходность жестко связаны друг с другом, так что иногда под доходностью понимают именно множитель наращенного (впрочем, эта замена не лишена оснований).

Определенную выше доходность будем называть еще и *номинальной* или *расчетной*, чтобы отличить от других видов доходности.

Данное определение никак не учитывает продолжительности операции. Чтобы исключить произошедшие во время операции изменения, можно привести конечную оценку операции к началу операции, используя подходящий коэффициент дисконтирования.

Реальной доходностью операции называется величина $d_r = [K/(1 + \alpha) - H]/H = [K/(1 + \alpha)]/H - 1$, где α — величина инфляции за время проведения операции. Инфляция обесценивает конечную оценку операции в $(1 + \alpha)$ раз.

Пример еще одного вида доходности. Один из топ-менеджеров фирмы сказал на годовом собрании акционеров, что за прошедший год было вложено в различные проекты \$1 000 000, и эти вложения принесли \$1 200 000 дохода, что и свидетельствует об эф-

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

эффективности работы управленцев фирмы. Однако его поправили, сказав, что банки дают от 8 до 14% годовых, так что умелая работа управленцев принесла много меньше \$200 000. Определим эффективную доходность операции <http://>

$$d_3 = [K/(1 + b) - H]/H = [K/(1 + b)]/H - 1,$$

где b — ставка безрискового вложения или просто *безрисковая ставка* за время проведения операции. В советское время такой ставкой можно было считать ставку вклада до востребования в Сбербанке (сейчас так же, но с некоторой натяжкой, особенно после 17 августа 1998 г.). Дисконтируя конечную оценку к началу операции по безрисковой ставке, мы как бы вычитаем из конечного результата операции наращение капитала, которое могло быть получено в результате размещения капитала по безрисковой ставке без всякого риска.

Можно пойти дальше и для учета инфляции и возможности размещения по безрисковой ставке дисконтировать конечную оценку операции по произведению $(1 + \alpha)(1 + b)$ и определить точную доходность как $d_t = (K/[(1 + \alpha)(1 + b)] - H)/H = K/[(1 + \alpha) \times (1 + b)]/H - 1$. Однако несомненно, что имеется некоторая связь между темпом инфляции и безрисковой ставкой (последняя не намного больше), так что дисконтирование просто по произведению $(1 + \alpha)(1 + b)$ не даст нужного результата.

В указанных выше определениях доходности мы дисконтировали конечную оценку операции к ее началу. Однако получится то же самое, если дисконтировать начальную оценку операции к ее концу, т.е. нарастить начальную оценку по соответствующей ставке.

Все указанные выше определения доходности не учитывали продолжительность операции (номинальная доходность не учитывала совершенно, реальная и эффективная — лишь в малой мере — посредством учета инфляции и безрисковой ставки за время проведения) и могут быть названы *абсолютными доходностями*. Гораздо более выразительным является определение *доходности относительной* как скорости роста вложенных в операцию средств по отношению к размеру средств в начале операции. Такая доходность — скорость роста вложенного капитала — определяется в процентах годовых или в годовой доле. Иногда ее называют также *эффективностью операции*. Примем первое название — в процентах годовых. Обозначим ее i . Пусть длительность операции есть T , начальная и конечная оценки операции — H и K соответственно, тогда для определения i имеем уравнение $H(1 + i)^T = K$.

Пусть, например, $H = 100$, $K = 121$, $T = 2$, тогда, как легко видеть, $i = 10\%$, ибо $121/100 = (1 + 10/100)^2$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Если фиксировать значения капитала в моменты времени $0, 1, 2, \dots: K_0, K_1, K_2$, то можно определить среднюю скорость i на промежутке $[0, 2]$, например, как $(1+i)^2 = K_2/K_0$. Если же операция продолжалась время t и имела (абсолютную) доходность d , то доходность в процентах годовых i удовлетворяет уравнению $(1+i)^t = (1+d)$, откуда $i = (1+d)^{1/t} - 1$.

5.2. Текущая и полная доходность

Весьма часто финансовые операции бывают распределенные — длятся некоторое время и фактически состоят из нескольких более мелких операций. Например, после покупки акции владелец выжидает выгодный момент, чтобы ее продать, а за это время он получает дивиденды. Эти текущие доходы формируют так называемую текущую доходность. В случае с акцией — это дивиденды, в случае с облигацией — купонные выплаты.

Еще пример: гражданин купил дом в деревне, чтобы отремонтировать его и продать. Но в ожидании выгодного момента для продажи он находит возможность сдать его дачникам. Доход от сдачи дома — это текущий доход. Доход же от всей операции разумно назвать полным доходом.

Осенью 1995 г. в России были выпущены облигации государственного займа. Они имели четыре квартальных купона, проценты по каждому купону объявлялись за некоторое время до даты гашения очередного купона. Таким образом, текущая доходность этих облигаций менялась от квартала к кварталу. Полную же доходность можно было подсчитать только за целый год — после погашения всех купонов и самой облигации. Если принимать во внимание инфляцию, то реальная текущая доходность многих финансовых операций может значительно меняться во времени.

5.3. Поток платежей и его доходность

Пусть $\{R_k, t_k\}$ — поток платежей, в нем R_k — платежи, t_k — моменты времени. Будем говорить, что рассматриваемый поток имеет современную величину A при уровне доходности j , если $\sum_k R_k / (1+j)^{t_k} = A$. Если поток есть годовая рента с годовым платежом R и длительностью n , то рента имеет современную величину A при уровне доходности j , если $R \cdot a(n, j) = A$. Фиксируем A , тогда при увеличении R доходность ренты увеличивается. Можно сказать и по-другому: для увеличения доходности ренты надо увеличить годовой платеж.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Все эти соображения особенно хорошо видны на примере вечной ренты, поскольку для нее $A = R/i$ или, по другому: доходность вечной ренты есть $j = R/A$. Важно отметить, что определенная таким образом доходность потока платежей не зависит от ставки процента, а зависит только от величины и моментов самих платежей, в силу чего ее называют часто *внутренней доходностью потока платежей*.

Более точно внутренняя доходность потока платежей есть такая его доходность в только что определенном смысле, при которой современная величина этого потока равна нулю (такая характеристика имеется не у всякого потока платежей).

5.4. Другие виды доходности

Это доходность к погашению, доходность с учетом налогообложения, комиссионных и т.п. Когда доход получают в виде разности между покупной и продажной ценой ценной бумаги, правомерно рассматривать прирост курсовой стоимости как доход владельца, а падение — как убыток. Соотнеся этот доход с ценой покупки, придем к показателю доходности подобной сделки. Например, доходность ГКО с позиции владельца бумаги рассчитывается по так называемому показателю доходности к аукциону:

$$\frac{\text{Цена продажи} - \text{Цена покупки}}{\text{Цена покупки}},$$

но эту абсолютную доходность пересчитывают в процентах годовых. Последняя и есть доходность к аукциону.

Если учитывать налоги, комиссионные и другие побочные платежи, которые весьма часто сопровождают финансовые операции, то эти платежи могут значительно изменить доходность операции.

Пример 1. Вексель учтен по ставке $d = 10\%$ за 160 дней до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от номинала векселя.

Решение. При расчете доходности векселя его номинал часто не играет роли. Абсолютная доходность операции без учета комиссионных:

$$d = \frac{1}{1 - 0,1} - 1 = 11,11\%;$$

с учетом комиссионных:

$$\frac{1}{0,9 - 0,05} - 1 = 11,17\%.$$

Эффективность операции, т.е. доходность в процентах годовых:

$$(1,111)^{(360/160)} - 1 = 0,267, \text{ т.е. } 26,7\%;$$

с учетом комиссионных:

$$(1,117)^{(360/160)} - 1 = 0,282, \text{ т.е. } 28,2\%.$$

Узнайте стоимость

написания студенческой

5.5. Мгновенная доходность

работы на заказ

Пусть в момент t капитал равен $K(t)$, а за небольшое время Δt капитал равен $K(t + \Delta t)$, тогда средняя доходность \bar{d} на отрезке $[t, t + \Delta t]$ в процентах годовых (в долях) равна

$$K(t + \Delta t)/K(t) = (1 + \bar{d})^{\Delta t},$$

при малом Δt величина $(1 + \bar{d})^{\Delta t}$ с точностью до бесконечно малых 2-го порядка равна $1 + \bar{d} \cdot \Delta t$. Устремляя Δt к нулю, получаем

$$d = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [K(t + \Delta t) - K(t)]/[K(t) \cdot \Delta t] = K'(t)/K(t) = [\ln K(T)]'.$$

Итак, мгновенная доходность есть производная по времени натурального логарифма капитала или, как говорят, логарифмическая производная.

В частности, при постоянной мгновенной доходности d капитал растет во времени по экспоненте: $K(t) = K(0) \cdot e^{dt}$.

Пример 2. Капитал растет во времени с постоянной скоростью v , т.е. $K(t) = K_0 \cdot (1 + vt)$. Найти мгновенную доходность в произвольный момент времени.

Решение. Обозначим искомую мгновенную доходность $d(t)$, тогда $d(t) = K'(t)/K(t) = K_0 v / K_0(1 + vt) = v/(1 + vt)$. Итак, доходность со временем уменьшается. Это и понятно — приращение капитала за единицу времени постоянно и равно $K_0 v$, а сам капитал растет.

5.6. Эффективная и эквивалентная ставки процента

Эффективной ставкой называется годовая ставка сложных процентов, наращение по которой начальной суммы $S(0)$ дает к моменту t сумму $S(t)$, наращенную по какой-то схеме наращения. Ясно, что эффективная ставка f находится из уравнения $(1 + f)^t = S(t)/S(0)$. Пусть, например, наращение происходит по схеме сложных процентов m раз в году, каждый раз начисляется i/m процентов. Тогда эффективная ставка находится из уравнения: $(1 + f) = (1 + i/m)^m$, так что $f = (1 + i/m)^m - 1$.

Для данной операции с начальной и конечной оценками (H, K) *эквивалентной ставкой* называется доходность операции, выраженная в процентах годовых. Такая ставка e находится из уравнения $K/H = (1 + e)^t$, где t — длительность операции. Понятие эквивалентной ставки введено для сравнения различных операций по скорости наращивания ими капитала.

Пример 3. Определить проценты наращения, эквивалентные учетной ставке в 20%.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Решение. Обозначим учетную ставку d , ставку процентов i , тогда имеем уравнение $1/(1-d) = 1 + i$, откуда $i = d/(1-d)$. По данным примера $i = 0,25$, $d = 0,2/1,25 = 0,16$. Таким образом по своей доходности учетная ставка 20% эквивалентна наращению простых процентов по ставке 25%.

<http://>

Таким образом можно определить эквивалентность ставок различных операций.

Замечание 1. На финансовом рынке постоянно происходит сравнение цены актива с его доходностью. На этом рынке действует аналог знаменитого закона А. Смита: средняя норма доходности по всем отраслям народного хозяйства должна быть примерно одинакова. Поэтому активы, которые не могут обеспечить среднюю по рынку доходность, падают в цене, и наоборот, очень доходные активы поднимаются в цене.

Замечание 2. Распространенное мнение, что ценные металлы, драгоценности являются хорошим средством сохранения богатства во время инфляции, нередко не подтверждается. Во время безумного 1993 г. (в начале этого года Гайдар «отпустил» цены) многие цены в России возросли за год в 1000—5000 раз, и цены на серебро, золото не поспевали за ценами на продовольствие, определяющими фактически жизненный уровень большинства населения. Кое-кто из этого большинства вынужден был продавать эти металлы, теряя значительную часть их прошлой стоимости. Фактически за такой огромной инфляцией в условиях обнищания значительной части населения могут поспеть только цены на товары высокой потребительской полезности (проще говоря, товары первой необходимости).

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Если доходность одной операции в процентах годовых больше, чем аналогичная характеристика другой, значит ли это, что первую операцию надо предпочесть второй?

2. Значения капитала в моменты времени 0, 1, 2, 4 есть 100, 200, 300, 400. Найти доходность и среднюю доходность на отдельных промежутках (в процентах годовых).

Решение. Найдем, например, среднюю доходность на промежутке [1; 4]. В начале этого промежутка капитал равен 200, в конце 400. Приращение равно 200, таким образом доходность равна $200/200 = 1$, или 100%. Это абсолютная доходность. Если же хотим найти эффективность, т.е. доходность в процентах годовых d , то надо решить уравнение $(1 + d)^2 = 400/200$. Получим $d = 0,41$, или 41% годовых.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

3. Ссуда выдана на 2 года с обязательством выплатить на 30% больше (т.е. под 15% годовых простых процентов). Найдите эквивалентную ставку сложных годовых процентов.

4. На какую годовую ставку процентов нужно заменить номинальную ставку годовых сложных процентов $i = 12\%$, если начислять сложные проценты ежеквартально по 4%?

5. Найти внутреннюю доходность «циклического» инвестиционного проекта — см. задачу 1 из § 1.4.

Решение. Достаточно найти внутреннюю доходность потока платежей одного цикла, для чего следует решить уравнение $30\,000 = 10\,000 \cdot a(9, j)$, где j — искомая доходность. По таблице коэффициентов приведения ренты (приложение 3) подбираем j , чтобы $a(9, j) = 3$. Получаем $j = 30\%$.

6. Зависимость мгновенной доходности от времени задана формулой $d(t) = at$, где a — константа. Найдите изменение капитала во времени.

Указание. Нужно решить дифференциальное уравнение $K'(t) = K(t) \cdot at$ — это уравнение с разделяющимися переменными.

7. Иногда операции с иностранной валютой могут быть очень доходными. Пусть за ноябрь 1998 г. курс доллара возрос с 16 до 18 руб. Банк в начале месяца купил доллары за рубли, а в конце месяца продал доллары, получив рубли. Найдите доходность этой операции в процентах годовых. Если инфляция за этот месяц была 10%, то какова реальная доходность операции?

8. По срочному годовому рублевому вкладу банк платит 42% годовых. Прогноз повышения курса доллара за год — с 20 до 30 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и хранить их «в банке, а банку в тумбочке» («естественной» инфляцией доллара в 2–3% в год пренебречь)?

9. По срочному годовому рублевому вкладу банк платит 42% годовых, а по такому же валютному — 8%. Прогноз повышения курса доллара за год — с 20 до 26 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и положить их на валютный вклад (после 17 августа 1998 г. доверия к банкам у россиян нет, поэтому ограничимся просто теоретическим подсчетом, что выгоднее).

10. В советское время легковую машину можно было купить с большим трудом. Гражданин К. купил в 1977 г. «Жигули» за 8000 руб. Подрабатывая на ней частным извозом (в то время незаконным), он зарабатывал на ней в месяц «чистыми» 300 руб. (это примерно соответствовало зарплате доцента вуза), а через

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

два года продал ее за 8200 руб. Найдите и объясните на этом примере, что такое текущая и полная доходность (расходом на бензин и т.п. издержками пренебречь).

11. Обменные курсы валют в банке: по доллару США — 22,8/23,6 руб. за доллар; по итальянской лире — 13,6/15,4 руб. за 1000 лир (чем менее распространена валюта, тем больше по ней банковская маржа). Какова доходность для банка операции по обмену лир на доллары?

Р е ш е н и е. Банк купит 1000 лир по кросс-курсу следующим образом: мысленно работник банка выдаст сдающему лиры 13,6 руб. за каждую тысячу лир, а потом на эти рубли продаст доллары в количестве \$1 за 23,6 руб. Таким образом, за каждую тысячу лир будет выдано $13,6/23,6 = 0,576$ долл. То есть доходность операции f находится из уравнения $1 + f = (1 + d)(1 + l) = (23,6/22,8)(15,4/13,6) = 1,17$. Итак, доходность операции равна 17%.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 6 работы на заказ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Финансовый инструмент — это любой документ, который может участвовать в финансовых операциях: акции, облигации, депозитные сертификаты, векселя и т.д. Финансовые инструменты делятся на основные и производные. К основным относятся банковский счет, облигации и акции. Все остальные инструменты называются производными: депозитные сертификаты, векселя, форвардные и фьючерсные контракты, опционы и всевозможные их комбинации. Важнейшими характеристиками финансовых инструментов являются цена (для облигаций — курс), доходность (текущая и полная), ликвидность и т.п.

Собственно, продажа и покупка указанных финансовых инструментов и составляют финансовый рынок. На таком рынке продают и покупают ценные металлы и драгоценности, совершают различные операции с валютой других стран и деньгами своей страны (дают и берут займы).

6.1. Общие сведения о финансовых инструментах

В этом параграфе рассмотрим финансовые инструменты: облигации, акции, депозитные сертификаты, векселя, фьючерсы. Сначала кратко опишем первые два: облигации и акции.

Облигации — это ценные бумаги, обычно на предъявителя. Облигации имеют номинальную стоимость, или номинал N , который присваивают облигации в момент ее эмиссии. С течением времени цена облигации может меняться, но обычно говорят не о цене облигации P , а об отношении цены к номиналу и это отношение, выраженное в процентах, называют *курсом облигации* K . Итак, курс облигации $K = P/N$ или $P = KN$, а в процентах — $K = 100P/N$, $P = NK/100$.

Часто облигации имеют купон, который характеризуется купонной ставкой q , что дает владельцу купонный доход, равный доле q от номинала. Например, если $q = 10\%$, а $N = 1000$ д.е., то разовый купонный доход равен 100 д.е. Купонный доход выплачивается периодически или только один раз, например, при погашении облигации. Купонный доход рассматривается как текущий.

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, т.е. владелец получает их номинальную стоимость.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Облигации обычно называются по имени их эмитента: государственные, если их выпустило государство, муниципальные, корпоративные и т.п.

Благодаря фиксированному или текущему доходу облигации — весьма популярные ценные бумаги, по своей стоимости они превосходят остальные ценные бумаги.

Акция — это ценная бумага, обычно ее владелец занесен в особый список (реестр) акционеров, что дает ему некоторые права. Тот, кто выпускает (эмитирует) акции, называется *эмитент*. Акция дает ее владельцу право на получение дивидендов раз в квартал или с другой периодичностью. Дивиденды формируют текущий доход владельца акции. Если акции продаются и покупаются, то они имеют цену. Цена акции определяется многими факторами, некоторые из них носят случайный характер. Акции имеют номинальную стоимость, но обычно она не играет никакой роли.

Акции делятся на две большие группы: *обыкновенные* и *привилегированные*. Выплаты дивидендов и возврат капитала при банкротстве эмитента сначала производятся по привилегированным акциям и только после этого по обыкновенным. Недостаток привилегированных акций в том, что если компания успешно ведет дела, то дивиденды на обычные акции растут, а на привилегированные — нет.

Отметим для дальнейшего, что доходность облигации есть ее внутренняя доходность, понимаемая в смысле потока платежей (см. § 5.3) и определяемая номиналом облигации в смысле современной или наращенной величины — см. далее § 6.7—6.10. Цена же зависит и от внешних условий, в частности, от ставки процента. Цена ценной бумаги формируется спросом и предложением. При определении цены ценной бумаги продавца и покупателя стараются учесть все виды доходов, которые может принести ценная бумага.

6.2. Курс и доходность облигации без погашения с периодической выплатой купонных процентов

Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов. Пусть ставка купона q , ставка процента i , номинал облигации N . Тогда купонные выплаты $\{qN\}$ образуют вечную ренту. Дисконтируя все эти выплаты по ставке процента i , получим современную величину этой ренты, что и есть теоретическая цена облигации P . Итак,

$$P = qN/(1+i) + qN/(1+i)^2 + \dots = qN/i.$$

Следовательно, курс облигации есть $K = 100 \cdot q/i$. Если выплата купонных денег происходит p раз в году величиной qN/p ,

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

так что за год получается опять же qN , то эти купонные выплаты $\{qN/p\}$ надо дисконтировать по ставке $(1+i)^{1/p}$. Получаем формулу

$$K = (100q/p) [(1+i)^{1/p} - 1].$$

Пусть теперь курс облигации K известен. Найдем текущую доходность облигации указанного типа. Если купонные выплаты производятся раз в год, то за год облигация приносит доход qN , а в нее вложено P , следовательно, доходность равна $j = qN/P$, или $qN/(KN) = q/K$ — если курс считать долей, а в процентах — $j = 100q/K$.

Можно предложить и другой способ определения доходности облигаций указанного типа. Пусть доходность облигации равна j , тогда купонные выплаты наращивают стоимость облигации по этой годовой ставке, значит, если дисконтировать этот поток по ставке j , то получим современную величину этого потока, а это и есть уже известная цена облигации. Купонные выплаты представляют собой вечную ренту, ее современная величина равна qN/j . Итак, имеем уравнение $qN/j = KN/100$, откуда $j = 100q/K$.

Для облигаций рассматриваемого типа текущая и полная доходности совпадают.

6.3. Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу

Доход от такой облигации получают как разницу между номиналом N при погашении и ценой P облигации. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Если облигация куплена за m лет до погашения, то, дисконтируя платеж N по ставке процента i к современному моменту, получим теоретическую цену облигации $P = N/(1+i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100/(1+i)^m$ (понятно, что для такой облигации курс всегда меньше 100).

Теперь найдем доходность облигации, считая цену известной. Это просто: цена P , наращиваемая по ставке доходности j , через m лет станет равной номиналу облигации. Следовательно, $P(1+j)^m = N$ или $(KN/100)(1+j)^m = N$, окончательно $j = (100/K)^{1/m} - 1$.

6.4. Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении

Проценты по такой облигации начисляются с капитализацией по сложной купонной ставке q и выплачиваются в конце срока

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

одновременно с погашением. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность равна нулю. Пусть q, i — ставки купона и процента, и через n лет после выпуска облигация будет погашена. Таким образом, общая сумма выплат $N \cdot (1 + q)^n$ выплатят владельцу при погашении, равна $N \cdot (1 + q)^n$. Пусть облигация куплена за m лет до погашения. Дисконтируя к этому моменту сумму $N \cdot (1 + q)^n$ по ставке процента i , получим теоретическую цену облигации P . Итак, $P = N(1 + q)^n / (1 + i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100(1 + q)^n / (1 + i)^m$.

Теперь определим доходность облигации. Известная цена P , наращиваемая по ставке доходности j , через m лет должна вырасти до $N \cdot (1 + q)^n$, поэтому имеем уравнение $P(1 + j)^m = N \cdot (1 + q)^n$, откуда

$$j = (100/K)^{1/m} \cdot (1 + q)^{n/m} - 1.$$

6.5. Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением

Это самый общий тип облигаций. Суммарный доход от облигаций данного типа складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже облигации, или от погашения облигации — здесь доход может определяться разницей ставок процента при выпуске облигации и в момент ее погашения. Купонные выплаты формируют текущую доходность.

Пусть q, i — ставки купона и процента. Если облигация куплена за m лет до погашения, то будущие купонные доходы $\{qN\}$ есть годовая рента и ее современная величина есть $qN \cdot a(m, i)$, где $a(m, i)$ — коэффициент приведения этой ренты, т.е. $[1 - (1 + i)^{-m}] / i$. Добавив сюда еще современную величину номинала погашения $N \cdot (1 + i)^{-m}$, получим теоретическую цену облигации P . Итак, $P = N \cdot (1 + i)^{-m} + qN \cdot [1 - (1 + i)^{-m}] / i$, следовательно, курс облигации

$$K = 100 \cdot ((1 + i)^{-m} + q \cdot [1 - (1 + i)^{-m}] / i).$$

Теперь определим доходность облигации рассматриваемого типа. Дисконтируя номинал облигации при погашении и купонные платежи по (пока неизвестной) ставке доходности j , должны получить цену облигации P . Следовательно, имеем уравнение $N(1 + j)^{-m} + qN \cdot a(m, j) = P$, откуда и можно найти j . Приближенное решение этого уравнения несложно получить с помощью компьютера.

Узнайте стоимость

написания студенческой

6.6. Зависимость цены (курса) облигации

от ставки процента

работы на заказ

<http://>

Рассмотрим самый общий тип облигаций — с периодической выплатой процентов qN с постоянным q . Цена такой облигации $P = N(1+i)^{-m} + qN[1 - (1+i)^{-m}]/i$ складывается из дисконтированных к современному моменту номинала погашения N и купонных выплат $\{qN\}$. Легко видеть, что обе эти величины убывают при повышении ставки процента i , значит, и цена облигации при этом также падает. Это падение тем больше, чем дальше момент гашения облигации.

В примере 1 приведены результаты компьютерного исследования.

Пример 1. Взяты две облигации: I и II, обе номиналом 1000. Первая будет погашена через 6 лет, вторая — через 18 лет. Купонная ставка одинакова — 8%. Получилась такая зависимость цен облигаций от ставки процента:

Ставка процента	6	8	10	12	14	16
Цена облигаций I	709	634	568	510	469	413
Цена облигаций II	359	258	186	136	100	74

6.7. Цена вечной акции (доход — только дивиденды)

Доход от такой акции получают только в виде дивидендов, т.е. ее продажа не предусмотрена. Поэтому теоретическую или расчетную цену акции P определяют как дисконтированную к современному моменту вечную ренту будущих дивидендов по действующей ставке i . Если предположить, что дивиденды постоянны, равны d и выплачиваются раз в году, то d/i есть современная величина этой ренты, а также и цена акции P . Если выплаты дивидендов происходят p раз в году, то дисконтировать надо по ставке $(1+i)^{1/p}$ и расчетная цена акции будет $d/[i(1+i)^{1/p} - 1]$.

6.8. Банковские депозитные сертификаты

Такие сертификаты выдаются банками в обмен на размещаемые у них средства. Сертификаты отличаются от обычных банковских депозитов тем, что могут обращаться на вторичном рынке. Там они оцениваются исходя из текущей стоимости будущих денежных поступлений. Расчет их текущей стоимости интересен тем, что за время действия сертификата может произойти изменение текущей процентной ставки.

Пусть депозитный сертификат был выпущен на сумму 1000 руб. под 12% годовых. Следовательно, при его гашении через год его

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

владелец получит 1120 руб. Предположим, что через полгода ставка уменьшилась до 6%. Какова будет цена этого сертификата в этот момент?

Отв е т. Эта цена P , наращенная по ставке 6% годовых, через полгода должна вырасти до 1120. Имеем уравнение $P(1 + 0,06)^{1/2} = 1120$, отсюда получаем $P = 1087$ руб.

6.9. Арбитраж и характеристики финансовых инструментов

Если на одном рынке товар стоит дешевле, чем на другом, то можно купить товар на первом рынке, продать его на втором и получить некоторую прибыль. В советское время это называлось спекуляцией. Конечно, такое положение может быть лишь временным. Найдется много желающих проводить такие операции — они называются *арбитражными*. Эта операция приведет к повышению цены на первом рынке и к ее падению на втором. Разница цен может остаться (арбузы в Узбекистане всегда будут дешевле, чем в Москве), но она не сможет компенсировать транспортных и других издержек по этой операции. Финансовый рынок принципиально немногим отличается от обычных товарных рынков. Пожалуй, он более развит. Арбитражные операции проводятся и на нем. Отметим, что часто арбитражные операции покупки и продажи осуществляются одновременно.

Рассмотрим ценообразование фьючерсных и форвардных контрактов с учетом возможности арбитражных сделок.

Форвардные и фьючерсные контракты — это контракты на покупку или продажу определенного количества какого-либо товара на определенную дату в будущем, но по цене, установленной в момент заключения контракта. Фьючерсные контракты отличаются от форвардных лишь тем, что они обезличены, являются фактически стандартными и торговля ими ведется лишь на специализированных биржах, в то время как форвардные контракты могут быть весьма индивидуальны (например, между банком и его клиентом). В силу этого термин «фьючерс» можно употреблять также и по отношению к форвардным контрактам.

Рассмотрим ценообразование фьючерсов на покупку какого-то актива ровно через год. Пусть нынешняя цена актива равна \$10 000, банковская процентная ставка составляет 10%. Предположим, что этот актив приносит чистого дохода тоже 10% в год. Тогда справедливая цена такого актива через год составит 110% от нынешних \$10 000, т.е. \$11 000 (надо понимать, что доход, который принесет актив за год, добавляется к активу и за оба вместе и

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

платят \$11 000). Столько и должен звать фьючерс на покупку такого актива. В самом деле, предположим, что этот фьючерс сейчас продается за меньшую сумму, например, за \$10 000. Тогда арбитражер купит фьючерс, продаст сейчас имеющийся у него актив за \$10 000, положит вырученные деньги в банк, через год они нарастут до $\$10\,000 + \1000 , по имеющемуся у него фьючерсу купит точно такой же актив, какой продал год назад, за \$10 000 и получит в итоге прибыль \$1000.

Если же фьючерс будет переоценен, т.е. он дает право продать через год актив по большей цене, скажем за \$12 000, то арбитражер приобретает фьючерс, покупает актив сейчас за \$10 000, воспользовавшись банковским кредитом под 10% годовых. Через год этот актив он продает по фьючерсу за \$12 000 и в итоге получает прибыль \$1000 (т.е. $\$12\,000 - \$11\,000$).

Торговлю фьючерсами на биржах организует клиринговая палата. Допустим, что сегодня \$2000 — фьючерсная цена поставки актива через 3 дня, в момент $t = 3$. Если завтра фьючерсная цена поставки актива в момент t станет \$1900, то клиринговая палата перечислит на счет поставщика \$100. Эти \$100 будут сняты со счета покупателя и ему будет предложено пополнить свой счет. Если вдруг (под влиянием каких-нибудь событий, слухов и т.п.) послезавтра фьючерсная цена поставки актива в момент $t = 3$ поднимется до \$2200, то палата перечислит на счет покупателя \$300, сняв их со счета поставщика. Так клиринговая палата обеспечивает исполнение контракта ровно по цене \$2000.

Замечание 1. Для ориентировки приведем сведения о доходности некоторых конкретных ценных бумаг в странах со стабильной развитой экономикой (США, Германия, Великобритания и т.д.).

Годовые процентные ставки (%), декабрь 1995 г.

Банковский депозит с недельным сроком извещения о снятии средств	4,5
Трехмесячный банковский депозитный сертификат	6,38
Трехмесячный коммерческий вексель	6,45
Трехмесячный казначейский вексель (Великобритания)	6,45
Шестимесячный межбанковский кредит	6,34
Государственная облигация со сроком погашения 5 лет (Великобритания)	7,0
Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Великобритания)	7,4
Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Германия)	5,88

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, обеспеченная активами корпорации (Великобритания)	8,1
Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, не обеспеченная активами корпорации (Великобритания)	9,2

<http://>

Для сравнения: по состоянию на 28.01.1999 г. облигации сберегательного займа России имели купоны годовой доходности 50—60%.

Замечание 2. Ликвидность является одним из важнейших свойств финансовых инструментов и вообще активов, поэтому рассмотрим это свойство.

Говорят, что финансовый инструмент, актив *высоколиквиден*, если его можно быстро и без значительных потерь обратить в деньги. Это определение качественное. С количественной стороны можно определить ликвидность по формуле $l = 1/(\Delta t \Delta P)$, где Δt — время обращения (продажи) актива в деньги; ΔP — относительный размер потерь, т.е. доля потерь ценности актива при этом обращении в деньги.

На практике ликвидность активов, котирующихся на бирже и стандартизованных, обычно оценивают путем сопоставления числа заявок на покупку и продажу данного типа активов.

Замечание 3. 17 августа 1998 г. пирамида ГКО была обрушена. ГКО (государственное казначейское обязательство) — это вексель на 3 месяца, допускающий свободную перепродажу. Номинальная стоимость 100 000 руб. выплачивалась при погашении, а продавались ГКО с дисконтом, величина которого определялась на аукционе. Участники аукциона заблаговременно подавали заявку, в которой указывали объем покупки и цену в процентах от номинала. Распорядители аукциона отбирали заявки по самой большой цене до тех пор, пока не набирали нужный им объем, остальные заявки не принимались во внимание. Выпуск этих ГКО был назван пирамидой потому, что гашение векселей (ГКО предыдущих выпусков) производилось, как правило, из сумм, вырученных от продажи нового тиража ГКО.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Купонный доход назначается раз в году, если не указано обратное.

1. Что хорошо для владельца ценной бумаги: увеличение или уменьшение действующей процентной ставки в период владения этой бумагой, если эта бумага: а) облигация; б) акция; в) депозитный сертификат и т.д.?

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

2. Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при $q = 8\%$, $i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

3. Найдите курс бескупонной облигации за 5 лет до погашения при $i = 6\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 70.

4. Для бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении с помощью компьютера вычислен курс облигации — 212,7. Проверьте компьютерные расчеты, если купонная процентная ставка 10%, срок облигации — 10 лет, до гашения осталось 4 года и процентная ставка — 6% годовых.

5. Найдите курс бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении за 5 лет до погашения при $i = 4\%$, если облигация выпущена на 10 лет и $q = 8\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 100.

6. Найдите курс облигации без погашения с периодической выплатой — раз в год — процентов при $q = 8\%$, $i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

7. Найдите цену вечной акции с квартальными дивидендами 200 при годовой ставке $i = 8\%$.

8. Вычислите доходность операции учета векселя по ставке $d = 30\%$ за 3 месяца до его оплаты (временная годовая база равна 360 дней — месяц равен 30 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от достоинства векселя (см. § 5.4).

9. Какова доходность ГКО (в процентах годовых и к погашению), если данный тираж был размещен по цене 71,8% от номинала (цены гашения)?

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Дополнение к части I
<http://>
В дополнение вошли две главы, которые могут быть использованы в более продвинутом курсе финансовой математики, а также в разнообразных студенческих работах (курсовых, дипломных и т.п.). Материал главы в данном дополнении актуален в условиях перехода к рыночной экономике.

Глава 7

СИСТЕМА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНДИВИДА И УЧЕТ ЕЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Материал, излагаемый здесь, затрагивает фундаментальные вопросы финансовой математики: почему люди дают деньги в займы, как и когда предпочитают их отдавать, какова для них ценность или полезность денег и т.п. Расчеты и пояснения, приведенные в ч. I, полностью объективны, сейчас же они приобретут и субъективные нюансы. Излагаемый здесь материал будет также использован в ч. II пособия.

7.1. Система предпочтений индивида

Одним из основных элементов, участников экономики, финансового рынка является индивид — конкретный человек, домашнее хозяйство, рассматриваемое как целое, предприятие, банк и т.п.

Будем считать, что поведение участника финансового рынка полностью описывается следующей аксиомой.

Аксиома индивида. Каждый индивид принимает решения о покупках, обмене, взятии денег в долг и т.п. исходя исключительно из своей системы предпочтений.

Эта аксиома чрезвычайно упрощает анализ поведения потребителя. Далее мы сформулируем эту аксиому в строгих математических терминах.

Но сначала изучим систему предпочтений индивида. Это понятие применимо не только к участникам финансового рынка, но и в общэкономическом смысле, да, пожалуй, и в общечеловеческом.

Под товаром понимается некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте.

Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i -го товара обозначается x_i , тогда некоторый набор товаров обозна-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

чается $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. В число товаров входят и деньги как особый специфический товар.

Потребитель различает наборы товаров, предпочитая один набор товаров другому. Запись $X \preceq Y$ означает, что потребитель предпочитает набор Y набору X либо же не делает между ними различий. Из-за последнего обстоятельства это отношение называется *слабым предпочтением*. Оно формирует еще два отношения: отношение *равноценности* (или безразличия) — $X \sim Y$, если и только если $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$, и отношение *предпочтения* (или строгого предпочтения) — $X \prec Y$, если и только если $X \preceq Y$, и неверно, что $X \sim Y$. Какими же свойствами обладают эти три отношения?

Математики называют отношение *рефлексивным*, если $X \preceq X$ для всякого X ; *симметричным*, если $X \preceq Y$ влечет то, что и $Y \preceq X$; *транзитивным*, если $X \preceq Y$ и $Y \preceq Z$ влечет $X \preceq Z$; *совершенным* (или *полным*), если для любых двух наборов X, Y либо $X \preceq Y$, либо $Y \preceq X$.

Аксиома:

- 1) отношение слабого предпочтения рефлексивно, транзитивно и совершенно;
- 2) отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- 3) отношение предпочтения транзитивно;
- 4) для любого X множество слабой предпочтительности $P_X = \{Y: X \preceq Y\}$ выпукло;
- 5) каждый товар желателен для индивида — если $X \preceq Y$, то и $X \preceq Y$, а если к тому же $x_i < y_i$ для некоторого i , то $X \prec Y$.

Подчеркнем, что это именно аксиома, выражающая фундаментальные свойства системы предпочтений индивида, вообще говоря, живого человека. Рефлексивность и совершенность представляются вполне понятными: *рефлексивность* означает, что любой набор товаров равноценен сам себе, а *совершенство* — что индивид в состоянии сравнить по привлекательности любые два набора товаров. Пятое свойство также понятно и в разъяснениях не нуждается.

Какой смысл имеет четвертое свойство системы предпочтений? *Выпуклость* означает, что лучше иметь комбинацию товаров, пусть в меньших количествах, чем просто только какой-то один из этих товаров (лучше иметь немножко соли, сахара, кофе, хлеба, чем одну только соль, или один сахар, кофе, хлеб, хотя бы и в большем количестве).

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Свойство транзитивности, которым обладают отношения предпочтения и слабого предпочтения, не совсем очевидно, не очень наглядно и не сразу осознается потребителем, но если ему объяснить, что получится, если его система предпочтений не транзитивна, то он согласится, что свойство транзитивности должно быть, и произведет необходимую переоценку привлекательности для него тех или иных наборов товаров. Об аргументах в пользу транзитивности можно прочесть во многих книгах¹.

Отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Любое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется эквивалентностью. Любая эквивалентность на любом множестве разбивает его на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности. Итак, отношение равноценности является эквивалентностью и разбивает пространство товаров на непересекающиеся подмножества, называемые классами или множествами равноценности (или безразличия), а в случае двух или трех товаров эти классы называются кривыми или поверхностями равноценности. Каждое отдельное множество или класс равноценности состоит из наборов товаров, одинаково привлекательных для потребителя — он не отдает предпочтения ни одному из этих наборов. При этом каждый набор из пространства товаров попадает в какой-нибудь из классов равноценности, а именно в тот, где собраны наборы, одинаково ценные с ним.

Типичная картина для двух видов товаров показана на рис. 7.1.

Здесь K_x, K_y — классы равноценности наборов X, Y соответственно, $X < Y$, стрелка показывает направление предпочтения, заштриховано множество слабого предпочтения P_y .

Простой обмен наборами товаров может быть чрезвычайно выгодным для обоих участников. В свое время А. Смит привел поразительный пример такого обмена: дальнорукый и близорукий имеют каждый не те очки, и в результате обмена получают ценнейшие для себя вещи.

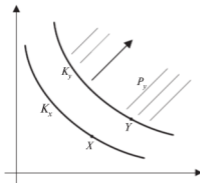


Рис. 7.1

¹ См., например: Райфа Г. Анализ решений. — М.: Наука, 1972.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Похожий вариант обмена показан на рис. 7.2. Пусть первый участник имеет набор товаров A , а второй — набор товаров B . Теперь представим, что они поменялись этими наборами. Так как набор B лежит выше кривой равноценности первого участника (сплошная линия), на которой

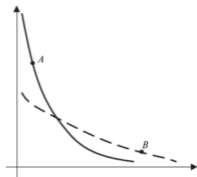


Рис. 7.2

которой лежит прежний набор A , то набор B для него ценнее. Аналогично и для второго участника (кривая равноценности которого изображена штриховой линией).

Теперь пусть одним из товаров являются деньги. Тогда подобный вариант обмена есть покупка товара одним из участников у другого участника и эта сделка обоюдовыгодна.

Система предпочтений индивида указывает, какой из двух наборов предпочтительнее для него. Во многих случаях, однако, весьма желательно и удобно оценивать привлекательность набора товаров количественно, т.е. приписать каждому набору X из пространства товаров C какое-то число $u(X)$. Получается функция $u: C \rightarrow R$. Главное требование к такой функции — она должна отражать отношение (слабого) предпочтения на C , т.е.

$u(X) \leq u(Y)$, если и только если $X \preceq Y$;

$u(X) = u(Y)$, если и только если $X \sim Y$, значит, и

$u(X) < u(Y)$, если и только если $X \prec Y$.

Такая функция $u(X)$ называется *функцией полезности*. Работать с функцией полезности гораздо удобнее, чем с системой предпочтения.

7.2. Временная ценность денег для индивида

В § 1.6 определена математическая эквивалентность денежных сумм в различные моменты времени при определенной процентной ставке: денежные суммы $S(T)$ в момент T и $s(t)$ в момент t называются эквивалентными по ставке сравнения i , если $S(T) = s(t)(1+i)^{T-t}$. Можно сказать и по-другому: определим эквивалентность на множестве пар (s, t) , где s — денежная сумма, а t — момент времени, так: пары (s, t) , (S, T) эквивалентны, если $S(T) = s(t)(1+i)^{T-t}$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Графически эта эквивалентность показана на рис. 7.3.

На плоскости t (время) — S (деньги) проведены две кривые безразличия.

Каждая из кривых безразличия есть класс эквивалентности и задается уравнением $S(T) = s(t)(1 + i)^{T-t}$.

Каждая кривая определяется точкой $t = 0$ своего пересечения с осью, т.е. значением денежной суммы при $t = 0$. В финансовых операциях при расчетах используют именно математическую эквивалентность на парах (время—деньги).

Следовательно, можно сказать, что сумма s в момент t будет эквивалентна «сиюмоментной» сумме $s(1 + i)^{-t}$. При этом можно ограничиться рассмотрением единичной суммы и неотрицательными моментами времени. Обозначим «сиюмоментную» ценность единичной суммы в момент t через $V(t)$. Тогда $V(t) = (1 + i)^{-t}$, график этой функции изображен на рис. 7.4 кривой a .

Функцию $V(t) = (1 + i)^{-t}$ назовем *объективной функцией временной ценности денег*.

Однако у конкретного индивида эквивалентность (время—деньги) не обязательно совпадает с математической. Положение вполне аналогично отношению конкретного индивида к деньгам и ценам на разные товары: в магазинах висят ценники на товары, и все это создает эквивалентность

на пространстве наборов товаров вместе с деньгами — это, так сказать, всеобщая эквивалентность — аналог математической. Вместе с тем у каждого индивида свое конкретное отношение к деньгам, товарам и времени...

У конкретного индивида поэтому своя функция временной ценности денег, и она может отличаться от математической. Например, у человека, который через год вступит во владение большим наследством, она может выглядеть примерно, как кривая b на рис. 7.4. Зато для человека, у которого через два года доходы значительно уменьшатся, график временной ценности денег может выглядеть примерно, как кривая v .

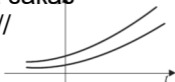


Рис. 7.3

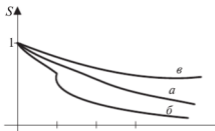


Рис. 7.4

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Вообще можно чисто условно выделить три типа функций временной ценности денег, называя их (по отношению к объективной функции временной ценности денег — кривая 0 на рис. 7.5): пессимистической, нейтральной и оптимистической — кривые соответственно I, II и III на рис. 7.5.

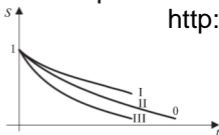


Рис. 7.5

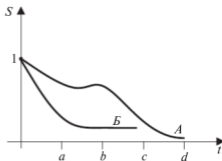


Рис. 7.6

Теперь можно сформулировать принцип дачи и взятия денег в займы: берут займы в промежутки большей ценности денег, отдают в промежутки меньшей ценности. Таким образом, индивиду A (рис. 7.6) (его функция временной ценности денег изображена кривой A) выгодно брать займы на промежутке (a, b) и отдавать на промежутке (c, d). Определите по графику функции временной ценности индивида B, когда

ему выгодно дать деньги в займы (кривая B) на рис. 7.6.

7.3. Полезность денег

Хорошо известно разное отношение людей к деньгам. Обозначим $d(x)$ — полезность денежной суммы x для индивида. Тогда примерный график $d(x)$ показан на рис. 7.7.

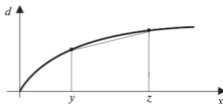


Рис. 7.7

Самое важное свойство этой функции — ее вогнутость, т.е. $d(z+y) \leq d(z) + d(y)$ для любых сумм z, y , или, другими словами: отрезок, соединяющий две точки графика

функции, лежит ниже этого графика. Можно сформулировать

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

это свойство и так: прирост полезности денег уменьшается с увеличением их количества. Это утверждение ниоткуда не следует, однако подтверждается всей человеческой практикой и потому его надо рассматривать как истинное, характеризующую поведение индивидуума.

Если функция $d(x)$ дифференцируема, то из того, что полезность денег увеличивается с ростом их количества, следует, что $d'(x) > 0$, а сформулированная выше аксиома влечет, что $d''(x) < 0$.

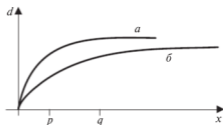


Рис. 7.8

С помощью функций полезности денег можно выразить характерное отношение к ним индивида. Например, пусть график функции полезности индивида A — это кривая a на рис. 7.8, а индивида B — кривая b на том же рисунке. Тогда можно сказать, что

индивид A хотел бы и будет доволен, если его доход лежит на промежутке $[p, q]$, при превышении такого дохода он начинает ценить деньги меньше, возможно, он переключается на другие «радости» жизни. Для индивида B такое состояние наступает позже.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Функция временной ценности денег индивида изображена на рис. 7.9, здесь же штриховой линией проведена кривая нейтральной функции временной ценности денег.

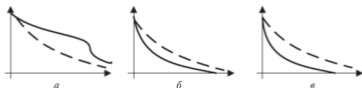


Рис. 7.9

Пусть индивид решает вопрос, как ему отдать заем: 1) одним платежом в конце, 2) равными выплатами во все время займа или 3) равными выплатами основного долга (и уменьшающимися выплатами процентных денег) (об этих способах погашения займа см. §§ 2.1—2.3. Тогда в случае a индивиду наиболее выгоден вариант 1, в случае b — вариант 2 и в случае $в$ — вариант 3. Если

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

же его функция нейтральна, то все три варианта для него равно-
приемлемы.

2. Проверьте, что функции $U(z) = \sqrt{z}$ и $U(z) = \ln(1 + z)$ удовле-
творяют требованиям к функции полезности денег.

3. Два индивида имеют одинаковую функцию полезности
денег — $U(z) = \sqrt{z}$. Разделите 1 д.е. между ними, чтобы суммар-
ная полезность была наибольшей.

4. Допустим, что временная ценность денег индивида совпа-
дает с объективной при ставке 10% годовых, а функция полез-
ности денег есть $U(z) = \sqrt{z}$. Какова для него полезность суммы
\$400 сейчас плюс \$500 через год?

У к а з а н и е. Надо дисконтировать \$500 и затем оценить
полезность суммарной суммы.

5. В нормальной экономике, где любой набор товаров можно
купить, функцию полезности индивида $u(X)$, определенную на
наборах товаров, можно заменить функцией полезности денег
по правилу: $u(X) = d(c(X))$, где $c(X)$ — цена или стоимость на-
бора товаров X , а $d(z)$ — полезность денежной суммы z для того
же индивида.

Постройте функцию полезности на пространстве двух това-
ров с ценами 2 и 5 д.е. за единицу товара и функцией полезно-
сти денег $d(z) = \sqrt{z}$.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 8 работы на заказ МОДЕЛИ ТОРГОВ <http://>

До сего момента рассматривались исключительно вопросы взаимоотношений участников финансового рынка без дискуссий, состязательности не было. Реальная жизнь, однако, изобилует примерами другого рода: банки борются за клиентов, повышая ставки; строительные фирмы удешевляют проекты, стараясь сделать их более привлекательными для инвестора; магазины снижают цены для привлечения покупателей. Поэтому всякого рода торги за приобретение прав на собственность или за преимущества при предоставлении услуг являются важным видом действий на финансовом рынке. Ниже дается описание простейших моделей торгов.

8.1. Аукционные торги: два лица и два объекта. Общее описание

На таких торгах для приобретения объекта, выставленного на аукцион, покупатели повышают цену не меньше, чем на некоторую величину $\Delta > 0$, установленную правилами аукциона, и тот, кто предложит самую большую цену, приобретает выставленный объект.

Обычно выставляется несколько объектов подряд, и участник аукциона должен рассчитать свои силы, чтобы... что? Какова его цель? То есть еще до начала аукциона участвующий должен определить цель своего участия в аукционе.

Для определенности, а также для упрощения предположим, что участников аукциона всего двое. Тогда цели участника могут быть, например, такими: 1) максимизировать свой доход; 2) минимизировать доход своего конкурента (чтобы ослабить его); 3) максимизировать разность своего дохода и дохода конкурента.

Из этих трех целей (а их может быть и больше) самой естественной представляется первая: максимизировать свой доход. Начнем, однако, с анализа действий, преследующих третью цель — максимизировать разность своего дохода и дохода конкурента.

8.2. Максимизация разности доходов

Для определенности предположим, что на аукцион последовательно выставлены два объекта известной стоимости V_1 и V_2 . Два участника A и B борются за право собственности на эти объекты.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Пусть A имеет S_A д.с. для участия в аукционе, а B — S_B . Пусть силы A и B примерно равны, математически это выражается так: $1/2 < (S_A / S_B) < 2$.

Вяясним, как должен вести себя участник A для достижения третьей цели. <http://>

Приступим к анализу аукционного процесса. Предположим, что B предложил текущую аукционную цену X . Примет ли ее A ? Если A не захочет платить такую цену, то B купит 1-й объект, в итоге он получит прибыль $R_B = V_1 - X$. Но израсходовав столь много на покупку 1-го объекта, он уступит 2-й объект участнику A , если тот предложит хотя бы немного больше, чем вообще сможет предложить B . Итак, у B осталось $S_B - X$, значит, если A предложит $S_B - X + \Delta$, то A приобретает 2-й объект и его доход оказывается равным $R_A = V_2 - (S_B - X + \Delta)$ и разность доходов

$$R_A - R_B = (V_2 - S_B - X + \Delta) - (V_1 - X). \quad (8.1)$$

Если же A не захотел уступить 1-й объект участнику B и увеличил цену, предложив $X + \Delta$, и B уступил, то B выиграет торги за 2-й объект, предложив за него $(S_A - (X + \Delta) + \Delta) = (S_A - X)$. В этом случае разность доходов

$$R_A - R_B = (V_1 - X + \Delta) - [V_2 - (S_A - X)]. \quad (8.2)$$

Таким образом, A должен уступить 1-й объект участнику B , если и только если разность доходов в этом случае больше, чем когда A идет на повышение и предлагает за 1-й объект $X + \Delta$. Итак, A должен предложить за 1-й объект $X + \Delta$, если $(V_2 - S_B + X - \Delta) - (V_1 - X) \leq (V_1 - X + \Delta) - [V_2 - (S_A - X)]$, или $4X \leq 2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B$, или $X \leq (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4$.

Следовательно, A будет повышать цену до значения X , определяемого равенством

$$X = (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4. \quad (8.3)$$

Дальше повышать цену ему нецелесообразно (не забудьте, что он преследует третью цель). Для нахождения разности между доходами значение X можно подставить в формулу (8.2) или (8.3) — результат будет одинаков. Искомая разность между доходами A и B :

$$R_A - R_B = (S_A - S_B)/2 - \Delta. \quad (8.4)$$

Доход A при этом равен $R_A = (V_1 + V_2)/2 - (S_A + S_B)/4 - \Delta$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Пример 1. Пусть A решил потратить на аукционе не более 1200 руб., а B — не более 1000. На взгляд A 1-й предмет, выставленный на аукцион, стоит 700 руб., а для B — 800 руб. Предмет повышает цену до значения $X = (2(700 - 800) + 1200 + 1000)/4 = 500$ руб. Пусть 1-й предмет куплен за эту цену. Если это купил B , то его доход $R_B = 200$ руб., а доход A есть $R_A = 800 - 500 = 300$ руб., так что разность доходов равна 100 руб. Можно убедиться, что такова же разность доходов и в случае, когда 1-й предмет был бы куплен A .

8.3. Максимизация собственного дохода

Пусть целью A является максимизация собственного дохода. Теперь A будет повышать цену и предлагать $X + \Delta$ за 1-й объект, если это позволит увеличить его аукционный доход. Значит, он поступит так, если

$$V_1 - (X + \Delta) \geq V_2 - (S_B - X + \Delta) \quad (8.5)$$

$$\text{или когда } X \leq (V_1 - V_2 + S_B)/2. \quad (8.6)$$

Если B также преследует цель максимизации своего аукционного дохода, то он предложит цену $X + \Delta$, когда

$$X \leq (V_1 - V_2 + S_A)/2.$$

Поэтому торги окончатся, как только аукционная цена превысит наименьшую из величин $(V_1 - V_2 + S_B)/2$ и $(V_1 - V_2 + S_A)/2$.

Если $S_B > S_A$, то 1-й предмет будет куплен A . Для нахождения его дохода надо подставить $X = (V_1 - V_2 + S_A)/2$ в левую часть неравенства (8.5). Получим

$$R_A = (V_1 + V_2 - S_A)/2 - \Delta. \quad (8.7)$$

Если же $S_A > S_B$, то 1-й предмет будет куплен B . Для нахождения дохода A надо подставить $X = (V_1 - V_2 + S_B)/2$ в правую часть неравенства (8.5). Получим

$$R_A = (V_1 + V_2 - S_B)/2 - \Delta.$$

Можно доказать, что доход, полученный A при максимизации его собственного дохода, всегда больше получаемого им дохода в случае, когда он стремится к максимизации разности своего дохода и дохода своего конкурента B .

Пример 2. Продолжим рассмотрение примера 1. Поскольку $S_A = 1200 > S_B = 1000$, то A должен купить 1-й объект и его доход по формуле (8.7) равен $R_A = (700 + 800 - 1000)/2 = 250$ руб. Основываясь на формуле (8.5), видим, что A не должен предлагать за 1-й объект больше, чем $(700 - 800 + 1000)/2 = 450$ руб.

Узнайте стоимость

написания студенческой

8.4. Одновременные торги

работы на заказ

Отличие этих работ от обычных — в том, что аукцион проводится одновременно по обоим объектам. Для упрощения предположим, что оба участника A и B располагают одной суммой S и $S < V_1 + V_2$. В случае равенства предложений победитель определяется жребием. При этом по-прежнему в основном интересуемся стратегией для A .

Оптимальные цены A_1, A_2 , которые должен предлагать A за объекты 1-й и 2-й соответственно, определяются из очевидного принципа: они должны обеспечивать равные доходы. Если обозначить этот доход d , то $V_1 - A_1 = d = V_2 - A_2$. Кто бы ни выиграл один из объектов, за оба объекта будет заплачено S . Это позволяет найти d : $2d = V_1 + V_2 - S$, значит, $d = (V_1 + V_2 - S)/2$. Отсюда находим цены: $A_1 = V_1 - d = (V_1 - V_2 + S)/2$. Если какая-либо цена получается отрицательной, то она полагается равной 0 и вся сумма S предлагается за другой объект.

Эта стратегия также оптимальна и для B . Если оба участника будут придерживаться этой оптимальной стратегии, то они будут назначать одинаковые цены и все будет определяться жребием — по 1-му объекту, 2-й объект достанется другому участнику. Ожидаемый доход каждого из участников равен при этом d .

Пусть, однако, B уклонится от оптимальной стратегии и предложит за 1-й объект $V_1 - d + e$. Тогда 1-й объект достанется ему, но за 2-й объект он сможет предложить только $V_2 - d - e$, поэтому этот объект достанется A , который предложит $V_2 - d$. Но в этом случае доходы участников окажутся разными: $R_B = d - e$, $R_A = d > R_B$. Таким образом, используя оптимальную стратегию, каждый из участников может всегда получить доход не менее d и всегда может воспрепятствовать другому участнику получить доход более d .

Пример 3. Пусть 1-й и 2-й аукционные объекты стоят соответственно 600 и 900 руб., каждый из участников располагает суммой 1000 руб. Тогда $d = 250$, значит, за 1-й объект не нужно предлагать более 350 руб., а за 2-й — не более 650 руб. Доход каждого из участников при оптимальной его стратегии не меньше 250 руб.

8.5. Торги, в которых число лиц велико и может быть неизвестным

Такие торги уже очень близки к реальным. Обычно они проходят по следующей схеме (применяемой и в России).

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Правительственное учреждение приглашает все заинтересованные компании принять участие в приватизационном торге. Компании присылают закрытые конверты, в которых назначают цену приватизационному объекту. Компания, назначившая высшую цену, объявляется победителем. Существуют научные рекомендации и по таким торгам, однако осуществление этих рекомендаций на практике требует большой работы по сбору сведений о конкурентах. Если не удастся получить сведений об их поведении на предстоящих торгах, то нужно анализировать их поведение на аналогичных торгах в прошлом.

Самым интересным в моделировании таких торгов является возможность для участников образовывать коалиции, проще говоря, сговариваться и действовать сообща всей коалицией. Ни же в нескольких задачах рассматривается образование коалиций.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим аукцион по продаже двух объектов, которые, на взгляд участника A , стоят 2000 и 3000 руб., в то время как в распоряжении A — сумма 2500, в распоряжении B — 3000 руб.

Найдите стратегию A по максимизации разности доходов и максимизации собственного дохода.

2. По данным предыдущей задачи найдите аукционную стратегию A по минимизации дохода конкурента.

3. Представим себе миллиардера, имеющего трех племянников и завещающего свое наследство тому, кого они назовут большинством голосов. По-видимому, двое из племянников договорятся голосовать за одного из них, чтобы наследник перечислил половину (или сколько?) наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему большую часть наследства. Получается противоречивая ситуация и разделить наследство согласно завещанию оказывается весьма сложно.

4. (Известная задача). Два человека хотят разделить торт. Как им это сделать, чтобы никто из них не обиделся?

5. (Известная задача, продолжение предыдущей). Три разбойника делят награбленную добычу. Как им это сделать, чтобы каждый верил, что разделили поровну?

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

6. На аукцион выставлены два предмета. Два участника предполагают одинаковые для каждого из предметов. Каждый из них подает закрытый конверт, в котором написано, какую сумму предлагает данный участник за каждый из этих предметов. Кто предложит за данный предмет больше, тот и становится его владельцем. Каковы стратегии участников?

Рассмотрите частный случай, когда оба предмета совершенно одинаковы. Должны ли устроители аукциона предусмотреть возможность сговора участников? Может быть, достаточно обязать участников аукциона указать в конверте такие суммы, чтобы вместе они были не менее некоторой заданной?

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Часть II _____

ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

- Глава 9. ИЗМЕНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ
- Глава 10. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ
ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ
- Глава 11. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ
ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ
- Глава 12. ОБЩИЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКОВ
- Глава 13. МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ АКТИВОВ
- Глава 14. БЫСТРЫЙ РОСТ КАПИТАЛА
- Глава 15. ОПЦИОНЫ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ
- Глава 16. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ
- Глава 17. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ
С ПОМОЩЬЮ ВЕДУЩЕГО ФАКТОРА
ФИНАНСОВОГО РЫНКА
- Глава 18. ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК И ЕГО МОДЕЛИ

ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ II _____

- Глава 19. ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ
- Глава 20. ОТНОШЕНИЕ ЛПР, ИНВЕСТОРА К РИСКУ

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ <http://>

Определенность — это когда известно все необходимое для расчетов. Неопределенность (отрицание определенности) приводит к неоднозначным результатам, что и есть риск. В условиях неопределенности у финансовых операций появляется еще одна характеристика — рискованность. Ризику посвящены гл. 10—12, да и в остальных это понятие — одно из центральных. В гл. 9 изложены некоторые изменения в финансовых расчетах, проводимых в условиях неполной определенности. В гл. 13 рассмотрена биномиальная модель ценообразования на финансовом рынке и некоторые ее модификации. В гл. 14 описаны стратегии ставок в игре «рулетка» для максимально быстрого роста капитала. Гл. 15 посвящена опционам — производным финансовым инструментам, играющим сегодня наиболее важную роль на финансовом рынке. В гл. 16, 17 изложена теория оптимального портфеля, в гл. 18 коротко описаны некоторые модели финансовых рынков. Дополнение к ч. II содержит изложение теории полезности и отношения ЛПР (инвесторов) к риску.

Стремление уменьшить риск и увеличить возможный доход — вот главное в действиях в условиях неопределенности. Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Неопределенность — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

В этой части предполагается знание читателем вузовского курса теории вероятностей и математической статистики.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 9 работы на заказ

ИЗМЕНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Суть того, что изложено в этой главе, поясним на примере. Рассмотрим три схемы выплаты дивидендов:

1) в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды в размере 100 д.е.;

2) в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды случайного размера, в среднем 100 д.е.;

3) в каждом квартале выплачиваются в некоторый случайный день дивиденды в размере 100 д.е.

Какая из этих трех схем предпочтительнее для владельца акций? Анализу аналогичных вопросов посвящена данная глава.

9.1. Плавающая ставка процента

Аналогично предыдущему примеру рассмотрим три варианта начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке:

1) в конце промежутка по ставке i начисляются проценты;

2) в конце промежутка начисляются проценты по случайной ставке, в среднем ставка равна i процентов;

3) проценты начисляются дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Рассматриваемая задача довольно абстрактна, однако из нее следуют прозрачные и несложные выводы.

Первый вариант начисления процентов — это вариант детерминированного финансового анализа, т.е. анализа в условиях определенности. Поэтому проанализируем второй и третий варианты. Достаточно ограничиться рассмотрением единичной денежной суммы.

Второй вариант. Пусть $f(x)$ — плотность распределения случайной ставки X , тогда начисляемые процентные деньги есть случайная величина $I(X) = X$ с плотностью $f(x)$ и математическим ожиданием $M[I] = M[X] = i$. Другими словами, детерминированный эквивалент случайной ставки есть i .

Третий вариант. Пусть первая порция процентных денег по ставке $i/2$ начисляется в момент $1 - \varepsilon$, а вторая, также по

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ставке $i/2$, в момент $1 + \varepsilon$, где ε — небольшое положительное число. Тогда в первый раз начисленные процентные деньги $I_1 = i/2$, во второй раз также $I_2 = i/2$. Приведем эти суммы к моменту 1, для чего I_1 умножим на $(1 + i)^{\varepsilon}$, а I_2 умножим на $(1 + i)^{-\varepsilon}$. Получаем эквивалент суммарных процентных денег в момент 1 — $(i/2)(1 + i)^{\varepsilon} + (i/2)(1 + i)^{-\varepsilon}$. Так как $(1 + i)^{\varepsilon} + (1 + i)^{-\varepsilon} > 2$, то получившиеся процентные деньги больше, чем i , т.е. детерминированный вариант таким образом начисляемой процентной ставки больше, чем i .

Как можно представить второй и третий варианты? Пусть банк имеет много филиалов, относительно самостоятельных в части выплаты процентов (в какой-то мере таковым является Сбербанк). Второй вариант получается, когда все они начисляют проценты в конце промежутка, но сами проценты случайные, хотя в среднем по всему банку процентная ставка равна i (усреднение по географическому признаку). Такой вариант назовем случайными процентами. Третий вариант получается, когда в каждом филиале начисляются одни и те же проценты, но день начисления случаен. Такая случайность есть начисление процентов (неслучайных) в случайный момент времени (здесь усреднение по времени начисления процентов).

Итак, детерминированный эквивалент случайных процентов (второй вариант) равен математическому ожиданию случайной величины начисляемых процентов. Детерминированный эквивалент случайного (во времени) начисления процентов (третий вариант) больше, чем математическое ожидание (по моменту времени) начисляемых процентов.

Аналогичные выводы следуют по поводу различных вариантов дисконтирования к современному моменту будущих сумм. Рассмотрим три варианта выплаты займа (в долг взята единичная сумма), взятого на единичный промежуток времени по ставке i процентов:

- 1) в конце промежутка выплачивается сумма $(1 + i)$ — детерминированный вариант;
- 2) в конце промежутка выплачивается случайная сумма, в среднем равная $(1 + i)$;
- 3) сумма выплачивается дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Анализ, подобный приведенному выше, показывает, что во втором варианте средняя величина дисконтированных к современному моменту выплат равна 1, т.е. второй вариант эквивалентен детерминированному варианту; в третьем варианте средняя величина оказывается больше, чем 1. Итак, для кредитора предпочтительнее

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

третий вариант. Это же верно и для случая трех вариантов выплаты дивидендов в конце главы — для владельца акций предпочтительнее третий вариант.

Все это хорошо известно финансистам и может быть выражено словами: *если возможно, свои долги плати позже, а долги себе собирай пораньше.*

<http://>

9.2. Случайные потоки платежей

Такие потоки могут быть весьма разнообразны:

- 1) полностью детерминированный поток — моменты платежей и величины платежей полностью определены;
- 2) частично детерминированный поток — полностью определены моменты платежей либо величины платежей и т.д.

Ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 1. По договору в течение 5 лет в конце каждого квартала издательство переводит на счет автора случайную сумму денег (зависит от числа проданных книг). Предположим, что эта сумма равномерно распределена от 1000 до 1400 руб. Как найти современную величину этой ренты?

Решение. Так как момент платежей точно определен, то для расчетов можно заменить поток реальных платежей потоком их математических ожиданий и использовать соответствующую формулу из детерминированного анализа. Так как переводимая сумма равномерно распределена, то ее математическое ожидание есть середина промежутка распределения, т.е. 1200 руб. Для простоты пусть квартальная ставка сложных процентов $i = 3\%$, тогда искомая современная величина равна

$$1200 \cdot a(20,3) = 1200 \cdot 14,877 = 17\,852 \text{ руб.}$$

Пример 2. Предположим, что единичные платежи следуют друг за другом через случайные промежутки времени, распределенные по показательному закону с параметром $\lambda > 0$ (пуассоновский поток платежей). Найдем современную величину такого случайного потока платежей (точнее, математическое ожидание этой величины).

Дисконтируем к современному моменту первый платеж. Для этого надо подсчитать интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1+i)^{-t} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-r(\lambda + \ln(1+i))} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \lambda e^{-r(\lambda + \ln(1+i))} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda + \ln(1+i)} e^{-r(\lambda + \ln(1+i))} \Big|_0^A \right) = \lambda / [(\lambda + \ln(1+i))]. \end{aligned}$$

Вспомним, что параметр λ в показательном законе есть обратная величина к математическому ожиданию, и получаем, что $\lambda = 1/T$, где T —

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

среднее время между платежами, и окончательно, что математическое ожидание современной величины первого платежа равно $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]$.

Поскольку промежуток времени между платежами распределен одинаково, то математическое ожидание современной величины второго платежа равно $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]^2$, третьего — $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]^3$, и т.д. Сумма всех этих величин и даст искомую величину. Поскольку $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)] < 1$, то члены суммы есть члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, значит, вся сумма равна $1/[T \cdot \ln(1 + i)]$.

В частности, при $T = 1$ получаем $1/\ln(1 + i)$. Заметим, что если бы поток был неслучайным и платежи следовали бы друг за другом через единичный промежуток времени (тогда частота платежей была бы той же самой), то современная величина такого потока была бы $1/i$. Так как $\ln(1 + i) < i$, то современная величина случайной ренты больше, чем регулярной.

Потоки платежей со случайным временем платежа часто встречаются на практике. Например, таков поток платежей оплаты за квартиру — ведь редко кто платит за квартиру в строго определенный день. Если бы в примере 1 издательство переводило автору деньги за каждую проданную тысячу экземпляров книги, то получился бы поток неслучайных платежей в случайные моменты времени.

Еще одним важным примером случайного потока (неслучайных) платежей является поток выплат страховых сумм на случай смерти родственникам умершего. Анализом подобных потоков платежей занимается так называемая актуарная математика.

9.3. Рисковые инвестиционные процессы

В замечании в конце гл. 4 указывалось, что для оценки характеристик инвестиционных проектов важнейшее значение имеет ставка дисконтирования будущих доходов к современному моменту. Если будущие платежи рискованны, т.е. не являются жестко определенными, то инвесторы уменьшают сегодняшнюю оценку будущих доходов. Тем самым для оценки сегодняшнего значения будущих доходов приходится применять увеличенную ставку дисконтирования. Самое простое — расклассифицировать проекты на низкорисковые, среднерисковые и высокорисковые и приписать каждой группе некоторый добавок к обычному коэффициенту дисконтирования. Например, для низкорисковых к ставке прибавляется 2%, к среднерисковым — 4%, к высокорисковым — 6%. Совершенно ясно, что «добавок» зависит от величины обычного коэффициента дисконтирования. Но сам этот коэффициент за-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

висит от темпов инфляции, от доверия к правительству и других факторов. В некоторых моделях финансового рынка этот вопрос решается по-своему (см. § 17.3).

Во всяком случае отсюда следует вывод: чтобы увеличить привлекательность выдвигаемых проектов, фирма должна заботиться об уменьшении этого рискованного «добавка». Для этого она должна привлекать к себе доверие потенциальных инвесторов. Привлечение доверия включает своевременную выплату дивидендов, соблюдение прав акционеров и др. Особенно это важно для фирмы, намеревающейся долго работать. Такой фирме просто необходимо быть честной, ей это выгодно.

9.4. Подсчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности

В детерминированном анализе доходность d финансовой операции определяется из уравнения $K = H(1 + d)$ или $d = (K - H)/H = K/H - 1$, где H , K — денежные оценки соответственно начала операции (затраты, инвестиции) и конца операции (доход, наращенный капитал). Вообще говоря, эти величины также могут быть неопределенны. Однако начальная оценка чаще все же точно известна. Неопределенность конечной оценки может быть двоякой: неполностью известна ее величина, но момент окончания операции известен точно; или же известна полностью ее величина, но окончиться операция может в случайный момент. Подсчет доходности операции в процентах годовых в этих двух случаях производится по-разному. В первом случае вместо конечной оценки используется ее математическое ожидание. Для иллюстрации подсчета доходности во втором случае рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Начальный капитал «челнока» равен \$1000. Опытные люди сказали ему, что в результате поездки за товаром и его последующей реализации капитал может с равной вероятностью возрасти в два раза, не измениться или уменьшиться в два раза (с вычетом сопутствующих издержек). Найти среднюю ожидаемую доходность планируемой операции.

Решение. Математическое ожидание конечной оценки капитала равно, очевидно, $(2000 + 1000 + 500)/3 = 3500/3$, так что средняя ожидаемая доходность будет $(3500/3 - 1000)/1000 = 500/3000 = 17\%$.

Пример 4. Запас золота в месторождении известен, как и начальные инвестиции в его разработку. Фактически полная отдача месторождения тоже фиксирована, следовательно, доходность (в процентах го-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

довых) будет зависеть от длительности выработки месторождения: чем дольше будет выработано месторождение, тем меньше доходность.

В случае, когда начальная оценка операции не может быть точно определена, доходность операции может быть рассчитана как математическое ожидание доходностей вариантов операции с учетом их вероятностей¹.

Пример 5. Базовый вариант операции, вероятность которого оценивается в 0,9, предусматривает затраты \$10 000, а прибыль — \$3000, следовательно, его доходность равна 0,3; с вероятностью 0,1 возможен и другой вариант, при котором затраты равны \$20 000, а прибыль равна \$10 000. Какова средняя ожидаемая доходность операции?

Решение. Эта доходность равна $0,9 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,32$.

9.5. Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя

Пусть f — какой-нибудь финансовый показатель (ставка процента, доходность, срок окупаемости и т.п.), являющийся случайной величиной. Предполагается, что финансовая операция, показателем которой f является, может быть повторена большое число раз (теоретически, хотя бы мысленно, неограниченное число раз). Тогда детерминированный эквивалент финансового показателя f есть такое значение его в детерминированном финансовом анализе, которое дает в среднем тот же результат, что и он сам.

Часто детерминированным эквивалентом является математическое ожидание f .

Замечание. Реально ситуация с плавающими процентными ставками или случайными потоками платежей еще более сложна, чем описано выше. Большинство инвесторов не согласны заменять что-то случайное его математическим ожиданием и требуют большего. Ведь всякая неопределенность связана с риском и поэтому инвесторы для рискованных операций требуют большей доходности, для дисконтирования к современному моменту будущих доходов по инвестиционному проекту они требуют применять большую ставку (тем самым уменьшая значение будущих доходов) и т.д. Осуществить на практике учет этих требований инвесторов довольно сложно (см. дополнение к ч. II).

¹ Есть и другой способ расчета доходности операции.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

(недостающие данные — по усмотрению читателя)

1. Дайте определение детерминированного эквивалента плавающей процентной ставки в любом случае начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке.

2. Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если ее начисление происходит дважды: первая половина в момент 0,9; вторая половина — в момент 1,1.

3. Найти детерминированный вариант процентной ставки, если с вероятностью $1/3$ ее начисление происходит в момент 0,9, и с вероятностью $2/3$ — в момент 1,1.

Решение. Пусть величина ставки равна i , а сумма единичная, тогда математическое ожидание наращенной суммы в момент 1 равно

$$(1/3) \cdot i \cdot (1 + i)^{0,1} + (2/3) \cdot i \cdot (1 + i)^{-0,1} = i \cdot [(1/3)(1 + 0,1 \cdot i + \dots) + (2/3)(1 - 0,1 \cdot i + \dots)] = i \cdot [1 - i/30 + \dots],$$

т.е. детерминированный вариант чуть меньше i .

4. Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если момент ее начисления равномерно распределен на временном отрезке $[0,9; 1,1]$.

5. Проанализируйте инвестиционный проект (-1000 , 600 , 600), процентная ставка 8% . Окупаются ли инвестиции? Эксперты признали проект среднерисковым и увеличили процент дисконтирования будущих доходов до 13% . Окупятся ли инвестиции в этом случае?

6. В случайный момент, равномерно распределенный на отрезке $[0,1]$, приходит платеж 1. Найдите математическое ожидание его современной величины.

7. Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты: платежи 1000 д.е. осуществляются раз в год: с равной вероятностью либо 1 октября, либо 1 декабря.

8. Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты, в которой момент годового платежа равномерно распределен в текущем году.

9. Сегодня днем цена акции равна 100 руб. За сутки цена может вырасти на 10% с вероятностью $1/3$, с такой же вероятностью уменьшится в 1,1 раза и с такой же вероятностью $1/3$ остаться равной 100 руб. Найдите распределение цены акции завтра и послезавтра.

10. Осуществляется одновременно множество инвестиционных проектов («золотая лихорадка на Клондайке»). Инвестиции в каждый проект равны $\$5000$, а будущий годовой доход случаен по про-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ектам — равномерно распределен от 500 до 3000 долл. Какая часть проектов окупится в течение 10 лет? (Процентная ставка 8% в год.)

11. В начале года страховая компания кладет в банк 1 д.е. под $i\%$ годовых. В любой момент времени возможен страховой случай, когда компании придется выплатить 1 д.е. страхового возмещения. Найдите математическое ожидание суммы на счете компании к концу года.

12. Проанализируйте инвестиционный проект, начальные инвестиции в который равны 1 в момент 0, а поток будущих доходов есть пуассоновский поток единичных платежей с плотностью 1 платеж в единицу времени. Ставка процента равна i .

13. Предположим, что вкладчик срочного годового вклада может в любой момент востребовать свой вклад (в России это можно, во многих других странах нельзя). При этом банк выплачивает за действительное время вклада проценты из расчета 10% годовых вместо 30% по срочному вкладу. Каков в среднем потерянный процент вкладчика?

Решение. Предполагаем, что момент отзыва вклада равномерно распределен в течение года. Если вклад отзывается в момент x , то выплаченные проценты равны $(1 + 0,1)^x$, а должны были быть равны $(1 + 0,3)^x$. Эту разницу проинтегрируем, имея в виду единичную плотность распределения момента отзыва вклада. Получим

$$\int_0^1 (1,3^x - 1,1^x) dx = 0,3 \cdot \ln 1,3 - 0,1 \cdot \ln 1,1 \approx 0,093, \text{ т.е. около } 9,3\%.$$

14. Игрок в казино бросает игральный кубик и передвигает свою фишку на выпавшее число секторов и получает (или отдает) выигрыш, написанный в том секторе, куда он попал. В начальный момент его фишка стоит в секторе «Вход» (рис. 9.1), и игра заканчивается, когда фишка попадает в этот же сектор. Каков средний доход хозяина казино за одну игру? Сколько бросков в среднем продолжается одна игра?

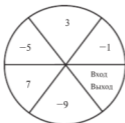


Рис. 9.1

Указание. Обозначим через $Z(t)$ дальнейший средний проигрыш игрока, когда его фишка стоит уже на секторе t . Тогда легко видеть, что $Z(t) = Z(t')$ для любых секторов t, t' .

Это позволит найти решение задачи. Вообще же рассматриваемый случайный процесс может быть отнесен к случайным процессам с независимыми приращениями, играющими важную роль в стохастической финансовой математике.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 10 работы на заказ

КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Неопределенность привносит риск. Риск — одно из важнейших понятий, сопутствующих любой активной деятельности человека. Вместе с тем это одно из самых неясных, многозначных и запутанных понятий. Однако несмотря на его неясность, многозначность и запутанность, во многих ситуациях суть риска очень хорошо понимается и воспринимается. Эти же качества риска являются серьезной преградой для его количественной оценки, которая во многих случаях необходима и для развития теории, и на практике.

Рассмотрим классическую схему принятия решений в условиях неопределенности. В этой схеме риск появляется весьма естественно и его количественная оценка здесь весьма проста.

10.1. Определение и сущность риска

Напомним, что *финансовой* называется операция, начальное и конечное состояния которой имеют денежную оценку и цель проведения которой заключается в максимизации дохода — разности между конечной и начальной оценками (или какого-нибудь другого подобного показателя).

Почти всегда финансовые операции проводятся в условиях неопределенности и потому их результат невозможно предсказать заранее. Поэтому финансовые операции *рискованны*: при их проведении возможны как прибыль, так и убыток (или не очень большая прибыль по сравнению с той, на что надеялись проводившие эту операцию).

Проводящий операцию (принимающий решение) называется ЛПР — *лицо, принимающее решение*. Естественно, ЛПР заинтересовано в успехе операции и является за нее ответственным (иногда только перед самим собой). Во многих случаях ЛПР — это инвестор, вкладывающий деньги в банк, в какую-то финансовую операцию, покупающий ценные бумаги и т.п.

Определение. Операция называется *рискованной*, если она может иметь несколько исходов, не равноценных для ЛПР.

Пример 1. Рассмотрим три операции с одним и тем же множеством двух исходов — альтернатив *A*, *B*, которые характеризуют доходы, получаемые ЛПР.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Все три операции рискованны. Известно, что рискованными являются первая и вторая операции, так как в результате каждой операции возможны убытки. Но почему должна быть признана рискованной третья операция, ведь она сулит только положительные доходы ЛПР? А вот почему. Рассматривая возможные исходы третьей операции, видим, что можем получить доход в размере 20 единиц, поэтому возможность получения дохода в 15 единиц рассматривается как неудача, как риск недобрать 5 единиц дохода.

	A	B
O_1 :	-5	25
O_2 :	-10	50
O_3 :	15	20

<http://>

Итак, понятие риска обязательно предполагает *рискующего* — того, к кому этот риск относится, кто озабочен результатом операции. Сам риск возникает, только если операция может закончиться исходами, не равноценными для него, несмотря на все возможные его усилия по управлению этой операцией. (О системе предпочтений индивида см. § 7.1.) В последующем изложении всюду будем считать, что исходы операций отличаются доходами, получаемыми ЛПР, и этого достаточно для их различения и оценки риска операции. (И только в дополнении к ч. II в § 19.5 системе предпочтений индивида, его функции полезности и отношению его к риску будет уделено много внимания.)

Итак, в условиях неопределенности операция приобретает еще одну характеристику — риск.

Как оценить операцию с точки зрения ее доходности и риска? На этот вопрос не так просто ответить, главным образом из-за многогранности понятия риска.

Существует несколько разных способов такой оценки. Рассмотрим один из таких подходов.

10.2. Матрицы последствий и рисков

Допустим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Неясно, чем она может закончиться. В связи с этим проводится анализ нескольких возможных решений и их последствий. Так приходим к следующей общей схеме принятия решений (в том числе финансовых) в условиях неопределенности.

Предположим, что ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i = 1, \dots, m$. Ситуация неопределенна, понятно лишь, что наличествует какой-то из вариантов $j = 1, \dots, n$. Если будет принято i -е решение, а ситуация есть j -я, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход q_{ij} . Матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей последствий* (возможных решений). Какое же решение нуж-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

но принять ЛПР? В этой неопределенной ситуации могут быть высказаны лишь некие общие рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i -е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Если ситуация j -я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i -е решение, мы рискуем полу-

чить не q_j , а только q_{ij} , т.е. принятие i -го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется *матрицей рисков*.

Пример 2. Пусть матрица последствий есть

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу рисков. Имеем $q_1 = \max_i q_{i1} = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$.

Следовательно, матрица рисков есть

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

10.3. Анализ связанной группы решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов реальной ситуации). Какие же существуют правила-рекомендации по принятию решений в этой ситуации?

Правило Вальда (*правило крайнего пессимизма*). Рассматривая i -е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min_j q_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0} .

Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $a_{i_0} = \max_i a_i = \max_i \left(\min_j q_{ij} \right)$. Так, в примере 2 имеем $a_1 = 2$, $a_2 = 2$,

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

$a_3 = 3, a_4 = 1$. Теперь из чисел 2, 2, 3, 4 находим максимальное — 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая i -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0} . Итак, правило Сэвиджа ре-

комендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

Так, в примере 2 имеем $b_1 = 8, b_2 = 6, b_3 = 5, b_4 = 7$. Теперь из чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное, т.е. 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i , на котором достигается максимум $\left\{ \lambda \min_j q_{ij} + (1 - \lambda) \max_j q_{ij} \right\}$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма» (догадайтесь сами, что это значит). В примере 2 при $\lambda = 1/2$ правило Гурвица рекомендует второе решение.

10.4. Анализ связанной группы решений в условиях частичной неопределенности

Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j . Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Как здесь принимать решение? Можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Доход, получаемый фирмой при реализации i -го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $\left[\begin{array}{c|c} q_{i_1} & q_{i_n} \\ \hline p_1 & p_n \end{array} \right]$. Математическое ожидание $M[Q_i]$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также \bar{Q}_i . Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Предположим, что в схеме примера 2 вероятности есть $1/2, 1/6, 1/6, 1/6$. Тогда $\bar{Q}_1 = 20/6, \bar{Q}_2 = 25/6, \bar{Q}_3 = 7, \bar{Q}_4 = 17/6$. Максимальный средний ожидаемый доход равен 7 и соответствует третьему решению.

<http://>

Правило минимизации среднего ожидаемого риска. Риск фирмы при реализации i -го решения является случайной величиной

R_i с рядом распределения $\left\{ \begin{matrix} r_{i1} \\ p_1 \end{matrix} \middle| \dots \middle| \begin{matrix} r_{in} \\ p_n \end{matrix} \right\}$. Математическое ожидание

$M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также \bar{R}_i . Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск.

Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях. Получаем $\bar{R}_1 = 20/6, \bar{R}_2 = 4, \bar{R}_3 = 7/6, \bar{R}_4 = 32/6$. Минимальный средний ожидаемый риск равен $7/6$ и соответствует третьему решению.

З а м е ч а н и е. Отличие частичной (вероятностной) неопределенности от полной неопределенности очень существенно. Конечно, принятые по правилам Вальда, Сэвиджа, Гурвица решения никто не считает окончательными, самыми лучшими. Это только лишь первый шаг, некоторые предварительные соображения. Далее пытаются узнать что-то о вариантах реальной ситуации, в первую очередь о возможности того или иного варианта, о его вероятности. Но когда мы начинаем оценивать вероятность варианта, это уже предполагает повторяемость рассматриваемой схемы принятия решений: это уже было в прошлом, или это будет в будущем, или это повторится где-то в пространстве, например, в филиалах фирмы.

10.5. Оптимальность по Парето

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись в предыдущем параграфе с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения.

Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть A — некоторое множество операций, каждая операция a имеет две числовые характеристики $E(a), r(a)$ (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной харак-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

теристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы E было больше r .

Будем говорить, что операция a доминирует операцию b , и обозначать $a > b$, если $E(a) > E(b)$ и $r(a) \leq r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция a называется *доминирующей*, а операция b — *доминируемой*. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди недоминируемых операций. Множество этих операций называется *множеством Парето* или *множеством оптимальности по Парето*.

Имеет место чрезвычайно важное утверждение

Утверждение. На множестве Парето каждая из характеристик E , r — (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую.

Доказательство. Пусть a , b — две операции из множества Парето, тогда $r(a)$ и $r(b)$ — числа. Предположим, что $r(a) \leq r(b)$, тогда $E(a)$ не может быть равно $E(b)$, так как обе точки a , b принадлежат множеству Парето. Доказано, что по характеристике r можно определить характеристику E . Так же просто доказывается, что по характеристике E можно определить характеристику r .

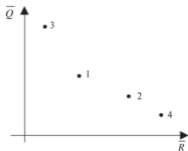


Рис. 10.1

Продолжим анализ приведенного в § 10.2 примера. Рассмотрим графическую иллюстрацию. Каждую операцию (решение) (\bar{R}, \bar{Q}) отметим как точку на плоскости — доход откладываем вверх по вертикали, а риск — вправо по горизонтали (рис. 10.1). Получили четыре точки и продолжаем анализ примера 2. Чем выше точка (\bar{R}, \bar{Q}) , тем более доходная операция, чем точка правее, тем более она рисковая.

Значит, нужно выбирать точку выше и левее. В нашем случае множество Парето состоит только из одной третьей операции.

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая для операции Q с характеристиками (\bar{R}, \bar{Q}) дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию. Например, пусть взвешивающая формула

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

есть $f(Q) = 2Q - K$. Тогда для операций (решений) примера 2 имеем: $f(Q_1) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$; $f(Q_2) = 2 \cdot 6 - 10 = 2$; $f(Q_3) = 2 \cdot 12 - 10 = 14$; $f(Q_4) = 2 \cdot 18 - 10 = 26$. Видно, что третья операция — лучшая, а четвертая — худшая.

Взвешивающая формула выражает отношение ЛПР к доходу и риску. Если ЛПР применяет только что рассмотренную формулу, то оно согласно на увеличение риска операции на две единицы, если доход операции увеличивается при этом не менее чем на одну единицу. Разумеется, такая формула может передать отношение ЛПР к доходу и риску лишь приблизительно.

10.6. Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют иногда в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности p_j считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил — рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. С помощью компьютера проанализирована матрица доходов, построена по ней матрица рисков и отмечены операции, оптимальные по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\lambda = 1/2$) в условиях полной неопределенности. Проверьте компьютерные расчеты.

		Матрица доходов				Матрица рисков							
	Вальд →	0	2	0	2	0	6	2	2	2	2	2	2
		0	2	0	2	0	6	2	2	2	2	2	2
		0	0	1	2	8	4	6	2	5	6	6	6
		2	2	2	4	10	6	4	0	3	4	4	4

2. С помощью компьютера проанализирована матрица доходов, построена по ней матрица рисков и отмечены операции, оптимальные по критериям максимальной эффективности и минимального риска в условиях частичной неопределенности. Проверьте компьютерные расчеты.

		Матрица доходов				Эффективность и риск		Матрица рисков					
		2	4	6	18	4,8	← max	0,8	0	2	2	0	0
		0	4	6	12	3,2		2,4	2	2	2	6	6
		2	6	8	14	5,2		min → 0,4	0	0	0	4	4
		0	1	2	8	1,4		4,2	2	5	6	10	10
		0,5	0,2	0,2	0,1		Вероятности состояний		0,5	0,2	0,2	0,1	0,1

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

3. Рассмотрим рискованную операцию Q с исходами q_1, \dots, q_n . Построим для нее вектор R с компонентами r_1, \dots, r_n , где $r_j = \max\{q_i : i = 1, \dots, n\} - q_j$, и назовем этот вектор вектором рисков. Если операция вероятностно с. у исходов есть вероятности, то можно определить средний риск операции и т.д.

4. Для матрицы из примера 2 § 10.2 примените правило Лапласа равновозможности и найдите решения, наилучшие по среднему ожидаемому доходу и по среднему ожидаемому риску.

5. Элемент матрицы называется седловой точкой в ней, если он минимален в своей строке и максимален в своем столбце. Докажите, что при наличии в матрице доходов седловой точки критерий Вальда рекомендует решение-строку, в которой находится седловая точка.

6. Рассмотрим схему принятия решений или связанную группу операций с матрицей доходов Q . Говорят, что i -е решение (операция) доминирует по доходам k -е решение (операцию), если $q_{ij} \geq q_{kj}$ для любого $j = 1, \dots, n$. Доминирование решений по риску определяется аналогично, но с заменой неравенства на противоположное. Докажите, что доминирование по доходам эквивалентно доминированию по риску. Выведите отсюда, что доминируемое в рассматриваемом смысле решение не может быть рекомендовано ни одним из рассмотренных выше правил-критериев. Поэтому такое решение не должно рассматриваться вообще и соответствующая строка подлежит удалению из матрицы доходов.

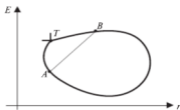


Рис. 10.2

7. Представим, что множество операций A из § 10.5 изображено на рис. 10.2. Найдите множество Парето. Докажите, что операция T оптимальна по Парето, если построенный в ней «уголок» — второй квадрант с вершиной в ней, пересекается с множеством A только по этой точке-операции.

8. Обратимся к рис. 10.2. Соединим две точки — операции A, B — отрезком. Каждую точку F на этом отрезке можно задать числом $0 \leq f \leq 1$, так что $F = fA + (1 - f)B$. Характеристики операции F получаются так же, как линейные комбинации соответствующих характеристик операций A, B . Присоединим все операции отрезка к изображенным на рис. 10.2.

Докажите, что если обе операции A, B — доминируемые по Парето, то и все операции отрезка A, B тоже доминируемы. Может ли так быть, что сами операции A, B недоминируемы, а все внутренние точки отрезка A, B доминируемы?

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Финансовая операция называется *вероятностной*, если существует вероятность каждого ее исхода. Прибыль такой операции — разность конечной и начальной денежных ее оценок — является случайной величиной. Для такой операции удастся ввести количественную оценку риска, согласующуюся с нашей интуицией.

11.1. Количественная оценка риска

В предыдущей главе дано определение рискованной операции как имеющей по крайней мере два исхода, не равноценных в системе предпочтений ЛПР. В контексте данной главы вместо ЛПР можно употреблять также термин «инвестор» или какой-либо подобный, отражающий заинтересованность в ее успехе проводящего операцию (возможно, пассивно).

При исследовании риска операции встречаемся с фундаментальным утверждением.

Утверждение. Количественная оценка риска операции возможна только при вероятностной характеристике множества исходов операции.

Пример 1. Рассмотрим две вероятностные операции:

$$Q_1: \begin{array}{|c|c|} \hline -5 & 25 \\ \hline 0,01 & 0,99 \\ \hline \end{array}, \quad Q_2: \begin{array}{|c|c|} \hline 15 & 25 \\ \hline 0,5 & 0,5 \\ \hline \end{array}.$$

Несомненно, риск первой операции меньше риска второй операции. Что же касается того, какую операцию выберет ЛПР, это зависит от его склонности к риску (подобные вопросы подробно рассмотрены в дополнении к ч. II).

11.2. Риск отдельной операции

Так как мы хотим количественно оценить рискованность операции, а это невозможно сделать без вероятностной характеристики операции, то ее исходам припишем вероятности и оценим каждый исход доходом, который ЛПР получает при этом исходе. В итоге получим случайную величину Q , которую естественно на-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

звать случайным доходом операции, или просто *случайным доходом*. Пока ограничимся конкретной случайной величиной (д.с.в.):

$$Q: \left| \begin{array}{c|c} q_1 & p_1 \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c|c} q_i & p_i \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c|c} q_n & p_n \end{array} \right|,$$

где q_j — доход, а p_j — вероятность этого дохода.

Операцию и представляющую ее случайную величину — случайный доход — будем отождествлять при необходимости, выбирая из этих двух терминов более удобный в конкретной ситуации.

Теперь можно применить аппарат теории вероятностей и найти следующие характеристики операции.

Средний ожидаемый доход — математическое ожидание с.в. Q , т.е. $M[Q] = q_1 p_1 + \dots + q_n p_n$, обозначается еще m_Q , \bar{Q} , употребляется также название *эффективность операции*.

Дисперсия операции — дисперсия с.в. Q , т.е. $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$, обозначается также D_Q .

Среднее квадратическое отклонение с.в. Q , т.е. $\sigma[Q] = \sqrt{D[E]}$, обозначается также σ_Q .

Отметим, что средний ожидаемый доход, или эффективность операции, как и среднее квадратическое отклонение, измеряется в тех же единицах, что и доход.

Напомним фундаментальный смысл математического ожидания с.в.

Среднее арифметическое значений, принятых с.в. в длинной серии опытов, примерно равно ее математическому ожиданию.

Все более признанной становится оценка рискованности всей операции посредством среднего квадратического отклонения случайной величины дохода Q , т.е. посредством σ_Q . В данной книге это основная количественная оценка риска.

Итак, *риском операции* называется число σ_Q — среднее квадратическое отклонение случайного дохода операции Q . Обозначается также r_Q .

Пример 2. Найдем риски первой и второй операций из примера 1:

$$Q_1: \left| \begin{array}{c|c} -5 & 0,01 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 25 & 0,99 \end{array} \right|, \quad Q_2: \left| \begin{array}{c|c} 15 & 0,5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 25 & 0,5 \end{array} \right|.$$

Сначала вычисляем математическое ожидание с.в. Q_1 : $m_1 = -5 \cdot 0,01 + 25 \cdot 0,99 = 24,7$. Теперь вычислим дисперсию по формуле

$D_1 = M[Q_1^2] - m_1^2$. Имеем $M[Q_1^2] = 25 \cdot 0,01 + 625 \cdot 0,99 = 619$. Значит, $D_1 = 619 - (24,7)^2 = 8,91$ и окончательно $r_1 = 2,98$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Аналогичные вычисления для второй операции дают $m_2 = 20$; $r_2 = 5$. Как и «полагала интуиция», первая операция менее рискованная.

Предлагаемая количественная оценка риска вполне согласуется с интуитивным пониманием риска как степени разбросанности исходов операции — ведь дисперсия и среднее квадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии) и суть меры такой разбросанности.

Пример 3. ЛПР рассматривает две возможные игры. В одной бросают монету, и ЛПР получает 10 денежных единиц, если монета упадет «орлом» вверх, и платит 10 единиц, если она упадет «решкой» вверх. Выплаты в этой игре образуют ряд распределения слева:

Монета		Игральный кубик					
"Решка"	"Орел"	1	2	3	4	5	6
-10	10	-20	-10	0	0	10	20
0,5	0,5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

В другой игре бросают игральный кубик и выплаты ЛПР образуют ряд распределения справа.

Средний ожидаемый выигрыш в обоих случаях равен 0. Однако интуитивно разбросанность платежей во второй игре больше. Вычисления дисперсии и риска подтверждают это:

$$D_1 = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 100; \quad D_2 = (400 + 100)2/6 = 500/3 \approx 167;$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = 10; \quad r_2 = \sqrt{D_2} \approx 13.$$

Средний ожидаемый доход операции Q , т.е. ее эффективность m_Q и ее риск r_Q связаны известным неравенством Чебышева:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \leq r_Q^2 / \varepsilon^2, \quad \text{или} \quad P(|Q - m_Q| \leq \varepsilon) > 1 - r_Q^2 / \varepsilon^2.$$

Однако известно, что это неравенство весьма грубое и на практике почти не применяется.

Если доход операции есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, то риск довольно точно указывает некоторые вероятности, связанные с эффективностью:

$$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0,997; \quad P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0,95. \quad \text{Иногда эти оценки весьма полезны.}$$

Следующие утверждения о риске являются следствиями соответствующих утверждений о дисперсии и среднем квадратическом отклонении из теории вероятностей.

Утверждения. А. При увеличении масштаба операции в k раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в k раз, эффективность операции увеличивается в k раз, а риск — в $|k|$ раз.

В. При изменении всех доходов на одно и то же постоянное число эффективность операции также изменяется на это число, а риск не изменяется.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

С. Пусть операции Q_1 и Q_2 некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий, поэтому риск суммарной операции равен $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

<http://>

Д. В общем случае, т.е. для двух произвольных операций Q_1 и Q_2 , риск суммарной операции равен $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2k_{12}}$, где k_{12} — коэффициент корреляции случайных доходов операций; заметим, что $|k_{12}| \leq 1$; из этой формулы вытекает, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r_1 + r_2$ (если $k_{12} > 0$ — при так называемой положительной корреляции доходов операций), так и меньше этой величины (если $k_{12} < 0$ — при отрицательной корреляции доходов операций).

Напомним, что случайные величины X , Y называются некоррелированными, если их корреляционный момент $K_{XY} = M[(X - m_X) \times (Y - m_Y)]$ равен 0; корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции k_{XY} связаны формулой $K_{XY} = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot k_{XY}$; независимые случайные величины некоррелированы.

Пример 4. Пусть операции Q_1 и Q_2 некоррелированы, найдем риск операции $Q = 0,5 \cdot Q_1 + 0,5 \cdot Q_2$ (например, денег не хватит на проведение обеих операций в полном объеме):

$$Q_1: \begin{vmatrix} -5 & 25 \\ 0,01 & 0,99 \end{vmatrix}, \quad Q_2: \begin{vmatrix} 15 & 25 \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Риски обеих операций уже найдены в примере 2: $r_1 = 2,98$; $r_2 = 5$. Значит, $r_Q = \sqrt{2,98^2 + 5^2} / 2 \approx (\sqrt{8,91 + 25}) / 2 \approx 5,82 / 2 = 2,91$.

Другие измерители риска. По нашему мнению, среднее квадратическое отклонение является наилучшим измерителем риска отдельной операции. В гл. 10 рассмотрены классическая схема принятия решений в условиях неопределенности и оценки риска в этой схеме. Полезно познакомиться и с другими измерителями риска. В большинстве случаев эти измерители — просто вероятности нежелательных событий.

11.3. Некоторые общие измерители риска

Пусть известна функция распределения F случайного дохода операции Q . Зная ее, можно придать смысл следующим вопросам и ответить на них.

1. Какова вероятность того, что доход операции будет менее заданного s ? Можно спросить по-другому: каков риск получения дохода менее заданного? *Отв е т:* $F(s)$.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

2. Какова вероятность того, что операция окажется неуспешной, т.е. ее доход будет меньше среднего ожидаемого дохода m ? *О т в е т:* $F(m)$.

3. Какова вероятность убытков и каков их средний ожидаемый размер? Или каков риск убытков и их оценка?

О т в е т: $F(0)$, $\int_{-\infty}^0 x dF(x) / F(0)$.

4. Каково отношение средних ожидаемых убытков к среднему ожидаемому доходу? Чем меньше это отношение, тем меньше риск разорения, если ЛПР вложил в операцию все свои

средства. *О т в е т:* $\int_{-\infty}^0 x dF(x) / \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$.

При анализе операций ЛПР желает иметь доход побольше, а риск поменьше. Такие оптимизационные задачи называют двухкритериальными. При их анализе два критерия — доход и риск — часто «свертывают» в один критерий. Так возникает, например, понятие *относительного риска операции*. Дело в том, что одно и то же значение среднего квадратического отклонения σ_Q , которое измеряет риск операции, воспринимается по-разному в зависимости от величины среднего ожидаемого дохода m_Q , поэтому величину σ_Q / m_Q иногда называют относительным риском операции. Такую меру риска можно трактовать как свертку двухкритериальной задачи:

$$\begin{aligned} m_Q &\rightarrow \max, \\ \sigma_Q &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

т.е. максимизировать средний ожидаемый доход при одновременной минимизации риска.

11.4. Риск разорения

Так называется вероятность столь больших потерь, которые ЛПР не может компенсировать и которые, следовательно, ведут к его разорению.

Пример 5. Пусть случайный доход операции Q имеет следующий ряд распределения, и потери 35 или более ведут к разорению ЛПР. Следовательно, риск разорения в результате данной операции равен 0,8:

Q :	-50	-40	-35	100
	0,1	0,2	0,5	0,2

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

Серьезность риска разорения оценивается именно величиной соответствующей вероятности. Если эта вероятность очень мала, то ею часто пренебрегают (в конце концов вероятность разорения отлична от нуля почти в любых условиях — из-за весьма маловероятных катастрофических событий на финансовых рынках, в масштабах государства, из-за природных явлений и т.п.).

Пример 6. ЛПР имело долг в \$40 000. Но оно имело рублевый вклад в 300 000 руб., который при курсе 6 руб. за доллар превышал долг. Вероятность трехкратной девальвации рубля оценивалась всего в 0,01, но она произошла. ЛПР было разорено, так как выплатить примерно \$25 000 не могло.

11.5. Показатели риска в виде отношений

Если средства ЛПР равны C , то при превышении убытков Y над C возникает реальный риск разорения. Для предотвращения этого отношение $K_1 = Y/C$, называемое *коэффициентом риска*, ограничивают специальным числом ξ_1 . Операции, для которых этот коэффициент превышает ξ_1 , считают особо рискованными. Часто учитывают также вероятность p убытков Y и тогда рассматривают коэффициент риска $K_2 = pY/C$, который ограничивают другим числом ξ_2 (ясно, что $\xi_2 \leq \xi_1$). В финансовом менеджменте чаще применяют обратные отношения C/Y и $C/(pY)$, которые называют коэффициентами покрытия рисков и которые ограничиваются снизу числами $1/\xi_1$ и $1/\xi_2$.

Именно такой смысл имеет так называемый коэффициент Кука, равный отношению:

$$\frac{\text{Собственные средства}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}}$$

Коэффициент Кука используется банками и другими финансовыми компаниями. В роли весов при «взвешивании» выступают вероятности — риски потери соответствующего актива.

11.6. Кредитный риск

Так называется вероятность невозврата в срок взятого кредита.

Пример 7. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 30% — другие банки и остальные — физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01; 0,05 и 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Можно ли сразу сказать, какой кредит не возвращает какой-то банк?

Решение. Вероятность невозврата найдем по формуле полной вероятности. Пусть H_1 — запрос, поступивший от госоргана, H_2 — от банка, H_3 — от физического лица и A — невозврат рассматриваемого кредита. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}A + P(H_2)P_{H_2}A + P(H_3)P_{H_3}A = 0,1 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,136.$$

Вторую вероятность найдем по формуле Байеса. Имеем

$$P_A H_2 = P(H_2)P_{H_2}A / P(A) = 0,015 / 0,136 = 15 / 136 \approx 1/9.$$

Как в реальности определяют все приведенные в этом примере данные, например, условные вероятности $P_{H_i}A$?

По частоте невозврата кредита для соответствующей группы клиентов. Пусть физические лица взяли всего 1000 кредитов и 200 не вернули. Значит, соответствующая вероятность $P_{H_3}A$ оценивается как 0,2. Соответствующие данные — 1000 и 200 берутся из информационной базы данных банка.

11.7. Депозитный риск

Так называется вероятность досрочного отзыва депозита. Очевидно, что депозитный риск нарушает нормальную работу банка, заставляя его перегруппировать свои активы по-другому, что всегда чревато потерями. Массовый отток депозитов вполне может привести к банкротству банка.

В общем случае депозитный риск зависит от длины анализируемого периода, динамики изъятия вкладов и многих других обстоятельств.

Пример 8. Пусть в банке много мелких клиентов (как в Сбербанке), и вероятность отзыва депозита для каждого из них примерно одна и та же. Тогда по интегральной формуле Муавра—Лапласа $P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi \left[(k_2 - np) / \sqrt{npq} \right] - \Phi \left[(k_1 - np) / \sqrt{npq} \right]$, где n — число клиентов; p — вероятность отзыва; $q = 1 - p$; k_1, k_2 — границы числа отзываемых вкладов; Φ — функция Лапласа. Таким образом, при большом числе независимых примерно одинаковых клиентов отток депозитов можно более или менее уверенно прогнозировать.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите следующие высказывания и определите, что порождает риск — незнание или случайность:

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

а) вы не имеете данных об изменениях курса доллар—рубли в течение прошлого года;

б) вы не имеете данных о состоянии активов вашего банка;

в) вы не знаете, как скажутся на деловых операциях последнее постановление правительства о...;

г) окажутся ли выгодными ваши фьючерсные контракты (это зависит от погоды в предстоящие 3 месяца);

д) вы решаете вопрос о выдаче кредита клиенту, о котором нет детальных сведений, но понятна его принадлежность к определенной социальной группе;

е) известна статистика возврата кредитов предприятиями группы, к которой принадлежит данное предприятие. Что здесь порождает риск невозврата?

ж) при страховании автомобиля какие факторы машины и владельца имеют важность и к чему они относятся: к незнанию или к случайности?

и) выдан кредит под залог жилого дома дебитора. Каковы возможные последствия и чем они обусловлены?

л) как стаж работы кассира связан с незнанием и случайными ошибками?

2. Для четырех операций с помощью компьютера вычислены эффективности (математические ожидания) и риски (квадратные корни из дисперсий):

Операции	Математическое ожидание	Риск
(0,1/3)(1,1/3)(2,1/6)(8,1/6)	2,00	2,77
(2,1/6)(3,1/3)(4,1/3)(10,1/6)	4,33	2,62
(0,1/5)(4,1/5)(6,1/5)(10,2/5)	6,00	3,79
(2,1/5)(6,1/5)(8,1/5)(12,2/5)	8,00	3,79

Проверьте компьютерные расчеты. Нанесите операции как точки на плоскость риск—эффективность и убедитесь, что первая и третья операции — доминируемые, а вторая и четвертая — недоминируемые, значит, оптимальные по Парето.

3. Пусть операция имеет два различных денежных исхода a и b с вероятностями соответственно p и $1 - p$. Изобразите графики зависимостей средней ожидаемой эффективности и риска операции от p .

4. Операции Q с эффективностью e и риском r и Q' с e' и r' , соответственно, некоррелированы. Рассмотрим операцию $Q_f = fQ + (1 - f)Q'$. Найдите ее риск как функцию f . При каком f риск минимален? Изобразите примерный график зависимости риска операции Q_f от f .

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

5. Пусть результатом операции является денежный доход, равномерно распределенный от a до b , $a < b$. Каков риск этой операции?

О т в е т: $|b-a|/\sqrt{12}$, так как дисперсия с.в., равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ равна $(b-a)^2/12$.

6. Доход операции Q случаен и имеет следующий ряд распределения:

$$Q: \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A(1-p) \\ \hline 1-p & p \\ \hline \end{array}.$$

Найдите эффективность и риск операции как функцию p . При каком p эффективность максимальна и чему равно это максимальное значение? Найдите ответы на эти вопросы и для риска операции.

7. Пусть даны две некоррелированные операции O_1 и O_2 , эффективности и риски которых (в смысле среднего квадратического отклонения) равны соответственно (r_1, e_1) и (r_2, e_2) . Изобразите на плоскости эти операции и (примерно) множество L всевозможных их линейных комбинаций (учтите утверждение из § 11.2). Есть ли в L операция, риск которой меньше минимального из рисков r_1, r_2 ? Найдите множество Парето для операций из L (опять учтите указанное утверждение). Рассмотрите также частные случаи: а) когда $r_1 = r_2$ и б) когда $e_1 = e_2$.

Р е ш е н и е этой задачи поучительно. Найдем решение только для случая, когда $r_1 < r_2$ и $e_1 < e_2$ (рис. 11.1). Рассмотрим операцию $O_f = fO_1 + (1-f)O_2$. Тогда ее эффективность равна $e_f = fe_1 + (1-f)e_2$ и ее риск $r_f = \sqrt{f^2 r_1^2 + (1-f)^2 r_2^2}$. Найдем производную от e_f по r_f по правилу дифференцирования параметрически зависящих аргумента и функции. Имеем $de_f/dr_f = (de_f/df) : (dr_f/df) = (e_1 - e_2) : 2[r_1^2 f - r_2^2(1-f)] / \sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2} = \left[\sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2} \right] (e_1 - e_2) / 2[r_1^2 f - r_2^2(1-f)]$. Видно, что искомая производная:

отрицательна при $1 \geq f > r_2^2 / (r_1^2 + r_2^2)$,
не существует при $f = r_2^2 / (r_1^2 + r_2^2)$,
положительна при $0 \leq f < r_2^2 / (r_1^2 + r_2^2)$.

Это значит, что искомое множество L операций примерно изображается кривой, как показано на рис. 11.1. В частности, множество Парето будет

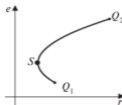


Рис. 11.1

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

частью SQ_2 этой кривой. Интересно также, что операция Q_1 перестает быть оптимальной по Парето.

8. Случайные доходы двух взаимосвязанных операций имеют таблицу распределения:

	-1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0	0,5

Найти эффективность и риск суммарной операции.

Решение. Ряд распределения суммарного дохода Q таков:

Q :

-1	0	1	2	3
0,1	0,2	0,2	0	0,5

Следовательно, эффективность суммарной операции равна 1,6, а риск суммарной операции равен 1,5.

9. Предположим, что ЛПР доступна безрисковая операция T с эффективностью e_0 . Пусть O — какая-нибудь другая операция с эффективностью $e > e_0$ и риском r . Рассмотрите операцию $S_f = fO + (1-f)T$ и выразите ее риск через ее эффективность.

Решение. Эффективность этой операции равна $e_f = fe + (1-f)e_0$, а риск равен $r_f = |f|r$ (см. утверждение из § 11.2). Имеем $f = (e_f - e_0)/(e - e_0)$ и, подставляя это выражение, получаем

$$r_f = r|e_f - e_0|/(e - e_0) = (r/(e - e_0))|e_f - e_0|.$$

Продолжим исследование.

На рис. 11.2 показаны эффективность и риск операций $fO + (1-f)T$ при различных f . Обратите внимание, что в принципе возможно достижение любой эффективности и любого риска. Далее конкретизируем на

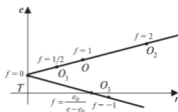


Рис. 11.2

примере. Пусть операция O — это вкладывание некоторой суммы S на 3 месяца на выращивание ранней клубники, эффективность — 20% и некоторый риск (см. точку O на рис. 11.2), операция T — сдача этой суммы в Сбербанк на те же 3 месяца под 5% (см. точку T). Тогда операция O_1 представляет собой два действия:

операция O_1 — сумма $S/2$ вкладывается в выращивание клубники,
сумма $S/2$ вкладывается в банк;

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

операция O_2 – сумма $2S$ вкладывается в выращивание клубники, для чего в банке берется ссуда в размере S под 5%,

операция O_3 – у кого-то <http://> что выращивает клубнику, берется займы на 3 месяца сумма S с обещанием возратить и ее, и «клубничный» доход с нее через 3 месяца и вся сумма $2S$ вкладывается в банк под 5%.

Наверное, последняя операция нецелесообразна. Да, повторять систематически ее, наверное, нецелесообразно. Ну, а если ЛПР имеет конфиденциальную информацию о предстоящих сильных заморозках?

10. Рассмотрим задачу **3** из гл. 10. В ней для операции Q с исходами q_1, \dots, q_n был определен вектор R с компонентами r_1, \dots, r_n , где $r_j = \max\{q_i; i = 1, \dots, n\} - q_j$. Назван этот вектор вектором рисков. Пусть операция Q вероятностная, т.е. у исходов есть вероятности. Докажите, что риск операции Q (в смысле среднего квадратического отклонения — СКО) равен СКО вектора рисков R .

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Глава 12

ОБЩИЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКОВ

Как правило, риск стараются уменьшить. Для этого существует немало методов. Большая группа таких методов связана с подбором других операций, таких, чтобы суммарная операция имела меньший риск.

12.1. Диверсификация

Напомним, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий. Из этого вытекает следующее утверждение, лежащее в основе метода диверсификации.

Утверждение 1. Пусть O_1, \dots, O_n — некоррелированные операции с эффективностями e_1, \dots, e_n и рисками r_1, \dots, r_n . Тогда операция «среднее арифметическое» $O = (O_1 + \dots + O_n)/n$ имеет эффективность $e = (e_1 + \dots + e_n)/n$ и риск $r = \sqrt{(r_1^2 + \dots + r_n^2)}/n$.

Доказательство этого утверждения — простое упражнение на свойства математического ожидания и дисперсии.

Следствие 1. Пусть операции некоррелированы и $a \leq e_i$ и $b \leq r_i \leq c$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда эффективность операции «среднее арифметическое» не меньше a (т.е. наименьшей из эффективностей операций), а риск удовлетворяет неравенству $b/\sqrt{n} \leq r \leq c/\sqrt{n}$ и, таким образом, при увеличении n уменьшается. Итак, при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность из промежутка эффективностей этих операций, а риск однозначно уменьшается.

Этот вывод называется *эффектом диверсификации* (разнообразия) и представляет собой в сущности единственно разумное правило работы на финансовом и других рынках. Этот же эффект воплощен в народной мудрости — «не клади все яйца в одну корзину». Принцип диверсификации гласит, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда эффективность окажется усредненной, а риск однозначно уменьшится.

При применении этого правила нужно быть осторожным. Так, нельзя отказаться от некоррелированности операций.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

Предложение 2. Предположим, что среди операций есть ведущая, с которой все остальные находятся в положительной корреляционной связи. Тогда риск операций «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа суммируемых операций.

Действительно, для простоты примем более сильное предположение, именно, что все операции O_i , $i = 1, \dots, n$, просто копируют операцию O_1 в каких-то масштабах, т.е. $O_i = k_i O_1$ и все коэффициенты пропорциональности k_i положительны. Тогда операция «среднее арифметическое» $O = (O_1 + \dots + O_n) / n$ есть просто операция O_1 в масштабе $\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) / n$ и риск этой операции $r = r_1 \left(\sum_{i=1}^n k_i / n\right)^2$. Поэтому, если операции примерно одинаковы по масштабности, т.е. $k_i \approx 1$, то и $r \approx r_1 \left(\sum_{i=1}^n k_i / n\right)^2 \approx r_1$. Мы видим, что риск операции «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа операций.

Пример 1. Предположим, ЛПР имеет возможность составить операцию из четырех некоррелированных операций, эффективности и риски которых даны в таблице:

i	1	2	3	4
e_i	3	5	8	10
r_i	2	4	6	8

Рассмотрим несколько вариантов составления операций из этих операций с равными весами.

1. Операция составлена только из 1-й и 2-й операций. Тогда $e_{12} = (3 + 5)/2 = 4$; $r_{12} = \sqrt{2^2 + 4^2} / 2 \approx 2,24$.

2. Операция составлена только из 1-й, 2-й и 3-й операций. Тогда $e_{123} = (3 + 5 + 8)/3 = 5,3$; $r_{123} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} / 3 \approx 2,49$.

3. Операция составлена из всех четырех операций. Тогда $e_{1-4} = (3 + 5 + 8 + 10)/4 = 6,5$; $r_{1-4} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2} / 4 \approx 3,54$.

Видно, что при составлении операции из все большего числа операций риск растет весьма незначительно, оставаясь близко к нижней границе рисков составляющих операций, а эффективность каждый раз равна среднему арифметическому составляющих эффективностей.

Принцип диверсификации применяется не только для усреднения операций, проводимых одновременно, но в разных местах (усреднение в пространстве), но и проводимых последовательно во

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

времени, например, при повторении одной операции во времени (усреднение во времени). Например, вполне разумной является стратегия покупки акции какой-нибудь стабильно работающей компании 20-го января каждого года. Неизбежные колебания курса акций этой компании благодаря этой процедуре усредняются и в этом проявляется эффект диверсификации.

Теоретически эффект диверсификации только положителен — эффективность усредняется, а риск уменьшается. Однако усилия по проведению большого числа операций, по отслеживанию их результатов могут, конечно, свести на нет все плюсы от диверсификации.

12.2. Хеджирование

В эффекте диверсификации ЛПР составляло новую операцию из нескольких, имеющих в его распоряжении. При хеджировании (от англ. *hedge* — изгородь) ЛПР подбирает или даже специально конструирует новые операции, чтобы, проводя их совместно с основной, уменьшить риск.

Пример 2. По контракту российская фирма через полгода должна получить крупный платеж от украинской компании. Платеж равен 100 000 гривен (примерно 600 тыс. руб.) и будет произведен именно в гривнах. У российской фирмы есть опасения, что за эти полгода курс гривны упадет по отношению к российскому рублю. Фирма хочет подстраховаться от такого падения и заключает форвардный контракт с одним из украинских банков на продажу тому 100 000 гривен по курсу 6 руб. за гривну. Таким образом, что бы ни произошло за это время с курсом рубль—гривна, российская фирма не понесет из-за этого убытков.

В этом и заключается суть хеджирования. При диверсификации наибольшую ценность представляли независимые (или некоррелированные) операции. При хеджировании подбираются операции, жестко связанные с основной, но, так сказать, другого знака, говоря более точно, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Действительно, пусть O_1 — основная операция, ее риск r_1 ; O_2 — некоторая дополнительная операция, ее риск r_2 ; O — операция-сумма, тогда дисперсия этой операции $D = r_1^2 + 2k_{12}r_1r_2 + r_2^2$, где k — коэффициент корреляции эффективности основной и дополнительной операций. Эта дисперсия может быть меньше дисперсии основной операции, только если этот коэффициент корреляции отрицателен (точнее: должно быть $2k_{12}r_1r_2 + r_2^2 < 0$, т.е. $k_{12} < -r_2/(2r_1)$).

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Пример 3. Пусть ЛПР решает проводить операцию O_1 .

O_1 :	-10	0	-5	S :	-10	20
	0,5	0,5	0,5		5	-5
O :					-5	15
					0,5	0,5

Ему советуют провести одновременно операцию S , жестко связанную с O . В сущности обе операции надо изобразить с одним и тем же множеством исходов.

Обозначим суммарную операцию через O , эта операция есть сумма операций O_1 и S . Вычислим характеристики операций: $M[O_1] = 5$, $D[O_1] = 225$, $r_1 = 15$; $M[S] = 0$, $D[S] = 25$; $M[O] = 5$, $D[O] = 100$, $r = 10$. Средняя ожидаемая эффективность операции осталась неизменной, а риск уменьшился из-за сильной отрицательной коррелированности дополнительной операции S по отношению к основной операции.

Конечно, на практике не так легко подобрать дополнительную операцию, отрицательно коррелированную с основной, да еще с нулевой эффективностью. Обычно допускается небольшая отрицательная эффективность дополнительной операции и из-за этого эффективность суммарной операции становится меньше, чем у основной. Насколько допускается уменьшение эффективности на единицу уменьшения риска, зависит от отношения ЛПР к риску (см. дополнение к ч. II).

Универсальным инструментом хеджирования являются опционы (см. гл. 14).

12.3. Страхование

Можно рассматривать страхование как один из видов хеджирования. Поясним некоторые термины.

Страхователь (или застрахованный) — тот, кто страхуется.

Страховщик — тот, кто страхует.

Страховая сумма — сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Эта сумма выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Выплата страховой суммы называется *страховым возмещением*.

Страховой платеж выплачивается страхователем страховщику.

Обозначим страховую сумму w , страховой платеж s , вероятность страхового случая p . Предположим, что застрахованное имущество оценивается в z . По правилам страхования $w \leq z$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Таким образом, можно предложить следующую схему.

Операции	Вероятности
Страхования нет	$-z$
Операция страхования	$w - s$
Итоговая операция (страхование есть)	$-s \quad w - s - z$

Найдем характеристики операции без страхования и итоговой операции. Из теории страхования известно, что при нулевой рентабельности страховщика можно считать, что $s = pw$. Получаем:

Характеристики операций	
Страхования нет	$M_1 = -pz, D_1 = p(1-p)z^2, \eta_1 = z\sqrt{p(1-p)}$
Операция страхования	$M = -s(1-p) + p(w-s-z) = p(w-z) - s = -pz,$
Итоговая операция	$D = S^2(1-p) + (w-s-z)^2 p - (pz)^2.$

Предположим далее, что $w = z$, т.е. страховое возмещение равно оценке застрахованного имущества, тогда $D = 0$.

Таким образом, страхование представляется выгоднейшим мероприятием с точки зрения уменьшения риска, если бы не страховой платеж. Иногда страховой платеж составляет заметную часть страховой суммы и представляет собой солидную сумму.

12.4. Качественное управление рисками

Риск — столь сложное понятие, что весьма часто невозможна его количественная оценка. Поэтому широко развиты методы управления риском качественного характера, без количественной оценки. К таким относятся многие банковские риски. Наиболее важные из них — это кредитный риск и риски неликвидности и неплатежеспособности.

1. *Кредитный риск и способы его уменьшения.* При выдаче кредита (или ссуды) всегда есть опасение, что клиент не вернет кредит. Предотвращение невозврата, уменьшение риска невозврата кредитов — это важнейшая задача кредитного отдела банка. Какие же существуют способы уменьшения риска невозврата кредита?

- Отдел должен постоянно систематизировать и обобщать информацию по выданным кредитам и их возвращению. Информация по выданным кредитам должна быть систематизирована по величине выданных кредитов, должна быть построена классификация клиентов, которые взяли кредит (физические лица, госорганы, предприятия, другие банки и т.п.);

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

- отдел (банк в целом) должен вести так называемую кредитную историю своих клиентов, в том числе и потенциальных (т.е. когда, где, какие кредиты брал и как их возвращал клиент). Пока у нас в стране большинство клиентов не имеет своей кредитной истории. Кроме того, обычно оценивается возможность возврата клиентом кредита с помощью анализа его баланса — если это банк; планов и технического уровня производства, перспектив развития — если это предприятие; и т.п.;
 - есть различные способы обеспечения кредита, например, клиент отдает что-то в залог и если не возвращает кредит, то банк становится собственником залога;
 - в банке должна быть четкая инструкция по выдаче кредита (кому какой кредит можно выдать и на какой срок);
 - должны быть установлены четкие полномочия по выдаче кредита. Скажем, рядовой сотрудник отдела может выдать кредит не более \$1000, кредиты до \$10 000 может выдать начальник отдела, свыше \$10 000, но не более \$100 000, может выдать вице-президент по финансам и кредиты свыше \$100 000 выдает только совет директоров (читайте роман А. Хейли «Менялы»);
 - для выдачи особо больших и опасных кредитов объединяются несколько банков и сообща выдают этот кредит;
 - существуют страховые компании, которые страхуют невозврат кредита (но есть точка зрения, что невозврат кредита не подлежит страхованию — это риск самого банка);
 - существуют внешние ограничения по выдаче кредитов (например, установленные Центральным банком); скажем, не разрешается выдавать очень крупный кредит одному клиенту;
- и т.д.

2. *Риски неликвидности, неплатежеспособности и способы их уменьшения.* Говорят, что средства банка достаточно ликвидны, если банк способен быстро и без особых для себя потерь обеспечить выплату своим клиентам денежных средств, которые они доверили банку на кратковременной основе. Риск неликвидности — это и есть риск не справиться с этим. Впрочем, этот риск лишь для краткости назван так, полное его название — *риск несбалансированности баланса в части ликвидности.*

Все активы банка по их ликвидности делятся на три группы:

1) первоклассные ликвидные средства (кассовая наличность, средства банка на корреспондентском счете в Центробанке, государственные ценные бумаги, векселя крупных надежных компаний); 2) ликвидные средства (ожидаемые краткосрочные платежи

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

банку, некоторые виды ценных бумаг, некоторые материальные активы, которые могут быть быстро и без больших потерь проданы, и т.п.); 3) неликвидные средства (просроченные кредиты и ненадежные долги, многие материальные активы банка, прежде всего здания и сооружения).

При анализе риска неликвидности учитываются в первую очередь первоклассные ликвидные средства.

Говорят, что банк платежеспособен, если способен расплатиться со всеми своими клиентами, но, возможно, для этого придется провести какие-нибудь крупные и длительные операции, вплоть до продажи оборудования, зданий, принадлежащих банку, и т.д. Риск неплатежеспособности возникает, когда неясно, сумеет ли банк расплатиться.

Платежеспособность банка зависит от очень многих факторов. Центральный банк устанавливает ряд условий, которые банки должны выполнять для поддержания своей платежеспособности. Самые важные из них: ограничение обязательств банка; рефинансирование банков Центральным банком; резервирование части средств банка на корреспондентском счете в Центральном банке.

Риск неликвидности ведет к возможным излишним потерям банка: чтобы расплатиться с клиентом, банку, возможно, придется одолжить деньги у других банков по более высокой процентной ставке, чем в обычных условиях. Риск неплатежеспособности вполне может привести к банкротству банка.

И ликвидность и платежеспособность банка рассчитываются по специальным методикам, которые утверждаются Центральным банком. Он же утверждает специальные нормативы по ликвидности и платежеспособности, которые банки должны выполнять. В нынешних условиях, имея хорошую вычислительную технику, банк ежедневно может рассчитывать эти нормативы и корректировать свои действия.

12.5. Форвардная и фьючерсная торговля

Уменьшить риск позволяют и форвардные контракты. Такие контракты обязательны для исполнения обеими сторонами в будущем по ценам, зафиксированным в момент заключения контракта. Например, 1 января фермер заключает форвардный контракт с мельником на поставку тому пшеницы в августе по определенной цене. В январе невозможно предсказать, каков будет урожай пшеницы и какова будет реальная цена пшеницы в августе. Если она будет выше, чем в контракте, — прогадает фермер,

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

а мельник выигрывает; если цена будет ниже — выиграет фермер, а в проигрыше окажется мельник. Форвардные контракты — это также форвардные, но они стандартизованы, обезличены и ими торгуют на биржах.

<http://>

Но почему такие контракты уменьшают риск? Дело в том, что снижение риска здесь происходит не только напрямую, но и косвенным образом: несомненно, что форвардные контракты делают рынок более предсказуемым, более стабильным, а значит, менее рискованным. Форвардные контракты напоминают постройку далеко впереди маяков, к которым идут участники рынка.

Вообще верно чрезвычайно общее утверждение — все, что делается открыто, с прицелом, прогнозом на будущее, с ясными поставленными целями, понятными всем, и т.п. — все это увеличивает предсказуемость, стабильность экономики, уменьшает риск. Верно и обратное — все, что делается тайно, без объявления целей, непредсказуемо — все это уменьшает стабильность рынка и увеличивает рискованность операций на таком рынке.

Чрезвычайно важным примером здесь является ипотечное кредитование (см. § 3.10). Напомним, что это долгосрочная ссудная операция под небольшие проценты под залог недвижимости заемщика, причем договоры об ипотечной ссуде действуют в неизменном виде десятки лет. В такой стране, как США, тысячи фирм занимаются таким кредитованием. Они представляют мощную силу, противостоящую любой нестабильности в стране, а также инфляции, которые могут значительно уменьшить их нормальную работу, а то и привести к разорению.

Капитализм извлек хороший урок из Великой депрессии 1929—1938 гг. В 1934 г. из-за несравнимости финансовых отчетов и по ряду других причин Конгресс США создал специальную комиссию по биржам и ценным бумагам. Одна из целей работы этой комиссии — обеспечить точность финансовой информации в отчетах фирм, объективное отражение экономических действий, что уменьшает риск.

В заключение обобщим пример 2: хеджирование в валютных сделках. Валютная сделка называется *spot*, если она осуществляется по сиюментной цене и окончательный расчет должен быть произведен не позднее второго рабочего дня после дня совершения сделки. *Форвардный валютный контракт* — это сделка, определяющая сумму валюты, которая должна быть обменена на другую валюту в определенный день в будущем по курсу, который записан в контракте. Форвардные операции служат для хеджирования возникающего валютного риска. Например, российский импортер ку-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

пил товар в Германии. Счет был выписан в немецких марках и должен быть оплачен через 90 дней. Для устранения риска повышения курса немецкой марки за этот период импортер осуществляет форвардную покупку немецких марок.

Третий вид валютных сделок — это операция *своп*, которая представляет собой сочетание покупки валюты на условиях спот и ее одновременной форвардной продажи. Операция спот весьма распространена. Когда речь идет о простой форвардной операции, то используют термин *аутрайт*.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Имеет ли смысл диверсификация с безрисковыми операциями?

Отвечая: относительный, поскольку при диверсификации данной операции с характеристиками r , e с безрисковой операцией эффективности e_0 пропорционально уменьшаются и риск, и надбавка за риск, т.е. разница $e - e_0$. Смысл диверсификации — в гашении колебаний доходности за счет некоррелированности или попарной отрицательной коррелированности составляющих случайных доходов.

2. Немецкий банк разместил в английском банке свободные средства на три месяца. Как захеджировать возникший риск возможного падения курса фунта стерлингов относительно немецкой марки?

3. Российская фирма взяла полугодовой кредит в немецком банке. Как захеджировать возникший риск падения курса рубля относительно немецкой марки?

4. Российский ученый поехал работать в Мексику на три месяца. Оплата его труда была предусмотрена в мексиканских песо. В период его работы в Мексике вся страна жила в ожидании девальвации мексиканского песо. Какие меры мог бы предпринять российский ученый для уменьшения своих потерь из-за девальвации песо?

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ АКТИВОВ

Глава 13 <http://>

Никто не отказался бы узнать завтрашние цены. Среди практиков-финансистов бытует мнение, что цены следуют некоторым ритмам, циклам, трендам. В наши дни, с развитием компьютерной техники и компьютерных сетей, связывающих весь мир в единое целое, поведение цен можно увидеть на экране компьютера в реальном времени. Так называемый технический анализ утверждает, что отдельные части графиков цен повторяются, и по начальному участку такой характерной фигуры можно понять, как график пойдет далее. В этом и заключается возможность предсказания поведения цены.

С целью получения ответа на вопрос, предсказуемо ли движение цен, было проведено множество исследований. Они принесли неожиданный и парадоксальный результат: скорее всего цены изменяются совершенно случайно, примерно так же, как изменяются скорости молекул газа в их хаотическом броуновском движении. Окончательно этот вопрос не решен и, по-видимому, не будет решен никогда, так как снова и снова будут появляться удачливые финансисты, уверенные, что они могут предугадывать будущее поведение цен.

В данной главе изложены три модели ценообразования активов. В этих моделях цена актива случайно меняется с течением времени. Первые две модели весьма простые — колебания цены имеют всего лишь два значения, из-за чего эти модели называются биномиальными. На основе этих моделей построены более сложные, имеющие уже практическое значение и используемые в реальных финансовых расчетах (см. гл. 14, посвященную ценообразованию опционов).

13.1. Простейшая биномиальная модель

В этой модели S — цена актива без каких-либо специальных ограничений типа цены облигации с погашением (в момент погашения цена равна номиналу облигации), например, это цена акции. Пусть единица временного промежутка есть день. Тогда цена актива к концу n -го дня будет $S_n = S_0 + x_1 + \dots + x_n$, где S_0 — цена в начале наблюдения, x_i , $i = 1, \dots, n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения -1 , $+1$ с вероятностью $1/2$. Поведение возможной цены актива изобразим на рис. 13.1.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

На рисунке изображено так называемое биномиальное дерево. Поведение цены можно представить как случайное движение по этому дереву слева направо.

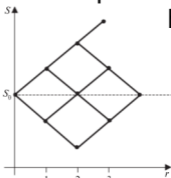


Рис. 13.1

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины S_n . Имеем

$$M[S_n] = M[S_0] + \sum_{i=1}^n M[x_i] = S_0,$$

так как математическое ожидание каждой с.в. x_i равно 0. Далее в силу независимости с.в. x_i дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий. Но дисперсия каждой с.в. x_i равна 1, следовательно, $D[S_n] = n$.

Обозначим $x_1 + \dots + x_n$ через X_n . Найдем ряд распределения X_n . Вероятность того, что из n с.в. x_i k

приняли значение +1, а остальные $(n - k)$ приняли значение -1, равна $C_n^k (1/2)^n$. Следовательно, $P(X_n = 2k - n) = C_n^k (1/2)^n$. Ряды распределения X_1, X_2, X_3 показаны на рис. 13.2.

$$X_1: \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array} \quad X_2: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & -2 \\ \hline 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline \end{array} \quad X_3: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & -1 & -3 \\ \hline 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 13.2

При $n > 10$ уже можно воспользоваться центральной предельной теоремой, гласящей, что сумма большого числа независимых и одинаково распределенных слагаемых приблизительно распределена по нормальному закону. Итак, при $n > 10$ $X_n \in N(0, \sqrt{n})$ и, значит, $P(\alpha < S_n - S_0 < \beta) \approx \Phi(\beta/\sqrt{n}) - \Phi(\alpha/\sqrt{n})$, где Φ — функция Лапласа. Отсюда следует, что при $n > 10$ $P(|S_n - S_0| < 3\sqrt{n}) = 0,9973$.

В частности, при $n = 16$ имеем $P(|S_n - S_0| < 12) = 0,9973$, т.е. за 16 дней цена изменится не более чем на 12 единиц (предполагается, что S_0 значительно превосходит 12).

В этой самой простой биномиальной модели цены не могут расти систематически, как, например, растет цена бескупонной облигации при приближении момента ее гашения. Ясно также, что математическое ожидание доходности актива равно 0. Поэтому и безрисковая ставка должна быть равна 0 (многочисленные наблюдения убеждают, что математическое ожидание доходности любого рискованного актива не может быть меньше безрисковой ставки). Все

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

эти соображения делают данную модель пригодной лишь для некоторых поясняющих численных расчетов (см. § 14.4).

13.2. Биномиальная модель Кокса—Росса—Рубинштейна

В этой модели есть два вида активов: банковский счет величиной B с постоянной процентной ставкой r , такой, что его величина к концу n -го временного промежутка $B_n = (1+r)B_{n-1} = (1+r)^n B_0$, и актив ценой S со случайной ставкой наращивания f_i , причем все ставки f_i — независимые и одинаково распределенные с.в., принимающие два значения — a , b , причем $a < b$ с вероятностью $1/2$, т.е. процентная ставка — плавающая (такие ставки рассмотрены в § 9.1). Следовательно, цена актива в момент n равна $S_0 \cdot \prod_{i=1}^n (1+f_i)$.

В частном случае, когда $b = \lambda - 1$, $a = 1/\lambda - 1$, где $\lambda > 1$, имеем

$$S_n = \begin{cases} \lambda S_{n-1}, & \text{если } f_n = b; \\ \lambda^{-1} S_{n-1}, & \text{если } f_n = a. \end{cases}$$

Если ввести случайную переменную $\varepsilon_n = \pm 1$ с вероятностью $1/2$,

то $S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}$.

Очевидно, что в данном случае цена актива S «блуждает» по множеству $\{S_0 \lambda^k : k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — рис. 13.3.

Математическое ожидание доходности актива равно $(a+b)/2$, так что должно быть $(a+b)/2 > r$. Докажем, что цена актива растет в сред-

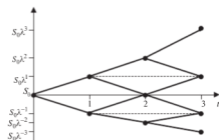


Рис. 13.3

нем по этой ставке. Найдем математическое ожидание цены в n -й

момент времени: $S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^n (1+f_i)$. Так как с.в. $(1+f_i)$, $i = 1, \dots,$

n , независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий, значит,

$$M[S_n] = S_0 \cdot \prod_{i=1}^n M(1+f_i) = S_0 \cdot [1 + (a+b)/2]^n. \quad (13.1)$$

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Аналог формулы (13.1) верен, даже если ставки j_i являются не постоянными, а зависят от изменения номера n .

13.3. Общая экспоненциально-биномиальная модель

В ходе исследований поведения цен было выяснено, что «случайно блуждают» не сами цены, а их логарифмы, т.е.

$$S_n = S_0 e^{H_n},$$

где $H_n = h_1 + \dots + h_n$ и эти с.в. h_i независимы и «примерно одинаковы».

Отсюда можно заключить по центральной предельной теореме, что величины H_n при $n > 10$ распределены приблизительно по нормальному закону. Параметры этого закона: математическое ожидание и дисперсия вполне определяются математическими ожиданиями с.в. h_i и их дисперсиями. Заменим «дискретное» время «непрерывным». Тогда, в частности, получится, что для любого момента t и любого $T > t$ натуральный логарифм отношения цен $S(t+T)/S(t)$ распределен по нормальному закону.

Когда натуральный логарифм случайной величины распределен по нормальному закону, то распределение самой с.в. называется *логнормальным*. Примерный график плотности логнормального распределения показан на рис. 13.4.

Можно доказать, что если $\ln Y$ распределен нормально с параметрами a, σ , то $M[Y] = e^{a + \sigma^2/2}$ и $D[Y] = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$.

Итак, в общей биномиальной модели отношение цен через любой временной промежуток распределено логнормально. Заметим, что $S(t+T)/S(t)$ — в сущности средняя доходность на промежутке времени, понимаемая как коэффициент или множитель наращения (это один из возможных вариантов понятия доходности — см. § 5.1). Следовательно, средняя доходность

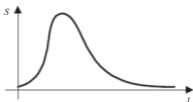


Рис. 13.4

(таким образом понимаемая) на любом временном промежутке распределена логнормально.

Однако убедительного соответствия этих предположений практике не наблюдается.

Узнайте стоимость

написания студенческой

13.4. Фундаментальный и технический анализ цен

работы на заказ

<http://>

Фундаментальный анализ — это анализ в целом и анализе общеэкономических (главным образом долгосрочных) тенденций на рынке, установлении факторов и скрытых взаимосвязей, влияющих на развитие рынка. При фундаментальном анализе используются разнообразные статистические данные, опубликованные в печати или имеющиеся в электронном виде. Широко применяются различные экономико-математические методы и модели.

В большинстве случаев фундаментальный анализ является скорее качественным, чем количественным. Он позволяет лишь выявить начала определенных тенденций и их направленность. Как правило, для более определенных выводов необходимы дополнительные исследования.

Технический анализ проводится с целью сиюминутного анализа рынка и улавливания краткосрочных аспектов поведения его. Технический анализ состоит в построении диаграмм, изучении только что заключенных контрактов и т.п. Прежде всего он направлен на изучение динамики цен на конкретный актив с целью предугадывания движения цены в ближайший период. Для этого на графиках поведения цен отыскивают повторяющиеся характерные фигуры («голова и плечи», «двойной верх» и т.п.) и действуют в предположении движения цены по этой фигуре.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В простейшей биномиальной модели из § 13.1 определите: а) какова вероятность того, что цена станет меньше первоначальной за 1 день; за 2 дня; за 3 дня; б) останется неизменной в течение 2 дней; 3 дней; в) станет такой же через 1 день; через 2 дня; через 3 дня.

2. Докажите, что в простейшей биномиальной модели из § 13.1 цена «не помнит» своего прошлого, т.е. ее случайное поведение есть марковский процесс. Графически это отображается так: в биномиальном дереве вырастающее из любого «сучка» дальнейшее дерево изоморфно первичному биномиальному дереву.

3. Владелец магазина гордится тем, что цены у него стабильны в течение недели. Он говорит: «В понедельник я цены назначаю по обстоятельствам. Но затем, если не происходит ничего из ряда выходящегося, я стараюсь их не менять». Формальное описание: если за предыдущие n дней было k изменений цены, то вероятность того, что на следующий день цена не изменится, равна $(n - k)/(n + 1)$. Убедитесь, что такие цены «помнят» свое прошлое.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

4. В простейшей биномиальной модели из § 13.1 определим с.в. $C_n = \max(0, S_n - C)$. Составьте явные распределения для с.в. C_1, C_2, C_3 .

З а м е ч а н и е. Подобные функции играют важную роль в теории ценообразования опционов (см. гл. 14).

5. По простейшей биномиальной модели из § 13.1 некий наблюдатель наблюдает цены через день. Как для него выглядит множество возможных цен?

6. Нарисуйте дерево возможных цен актива в биномиальной модели Кокса—Росса—Рубинштейна (КРР) при $a = 0, b = 0,1, S_0 = 10$ до $n = 5$. Какова наибольшая возможная цена актива в этой модели? Какова вероятность, что к $n = 5$ цена окажется 10, не больше 11, не больше 12? Найдите вероятность того, что в n -й момент цена будет больше первоначальной. Найдите математическое ожидание цены актива в моменты $n = 1, 2$.

7. Рассмотрите аналог простейшей биномиальной модели из § 13.1, в которой вероятности повышения и понижения цены не равны $1/2$.

8. То же, что в п. 7, относительно модели КРР.

9. Пусть в модели КРР $a = -0,1; b = 0,3$. Найдите вероятность того, что при достаточно больших $n (>10)$ $S_n > S_0$ (S_0 считать достаточно большим).

10. Как выглядит формула (13.1) в общей экспоненциальной модели с «дискретным» временем?

11. Предположим, что логарифм отношения цен через единичный промежуток времени распределен по нормальному закону с параметрами a и σ и поведение цены на непересекающихся временных промежутках независимо. Найдите распределение логарифма отношения цен через n единичных промежутков времени. Считая начальную цену S_0 фиксированной, найдите математическое ожидание и дисперсию цены S_n .

12. Пусть начальная цена актива $S_0 = 100$ и за единицу времени цена возрастает на 3 или убывает на 1 с вероятностью $1/2$. Найдите вероятность того, что при $n > 10$ цена $S_n > S_0$.

13. Простейшая тринომiальная модель отличается от простейшей биномиальной модели тем, что в ней цена актива к концу n -го дня есть $S_n = S_0 + x_1 + \dots + x_n$, где S_0 — цена в начале наблюдения, а $x_i, i = 1, \dots, n$, — независимые и одинаково распределенные с.в., принимающие значения $-1, 0, +1$ с вероятностью $1/3$. Поведение возможной цены актива можно изобразить на рис. 13.5.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Этот график изображает так называемое триномиальное дерево. Поведение цены можно представить как случайное движение по этому дереву слева направо.

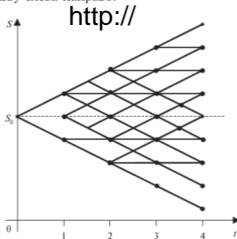


Рис. 13.5

Исследуйте простейшую триномиальную модель подобно тому, как это сделано в отношении простейшей биномиальной модели в § 13.2.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 14 работы на заказ

БЫСТРЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

<http://>

Рассматривается рост капитала при заключении контрактов, дающих случайный доход. Если заключить мало контрактов, то и капитал будет расти медленно, если много, — то можно и разориться при неудаче.

14.1. Постановка задачи о росте капитала

Рассмотрим ценную бумагу, которая за некоторый временной период дает какой-то случайный (с.) доход ξ . Это текущий доход. Основную стоимость бумаги будем считать постоянной. Пусть участник рынка имеет капитал K . Предположим, он желает в начале каждого указанного временного периода покупать сколько-то экземпляров указанной ценной бумаги, скажем, m , так что величина (в.) m/K остается постоянной от периода к периоду, хотя обе величины m , K могут меняться. Обозначим отношение m/K через s , так что $m = sK$.

Хорошим теоретическим примером является покупка одного и того же опциона в каком-то числе экземпляров — так как обычно премия—цена покупки опциона много меньше возможного выигрыша, и потому иногда этой премией—ценой опциона пренебрегают (об опционах см. следующую главу).

Но в конце концов, деньги, необходимые для покупки нужного числа экземпляров ценной бумаги, можно занять.

Приращение капитала за период есть

$$\Delta K = m\xi = sK\xi,$$

так что в конце периода — начале следующего капитал будет равен

$$K + \Delta K = K(1 + s\xi).$$

Следовательно, в конце 1-го периода капитал будет

$$K_1 = K(1 + s\xi_1),$$

в конце 2-го периода будет

$$K(1 + s\xi_1)(1 + s\xi_2),$$

в конце n -го периода капитал будет равен

$$K_n = K(1 + s\xi_1) \dots (1 + s\xi_n),$$

где K — капитал в начале 1-го периода, ξ_1, \dots, ξ_n — значения текущих доходов рассматриваемой ценной бумаги за соответствующие периоды.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Отношение K_n/K есть скорость роста за все n периодов, а $\sqrt[n]{K_n/K}$ естественно называть скоростью роста в среднем за период или просто средней скоростью роста. Спрашивается, каким должно быть s , чтобы эта средняя скорость была максимальной?

Имеем $\ln K_n = \ln K + \dots + \ln(1 + s\xi_n)$. Будем считать, что с.в. ξ_1, \dots, ξ_n одинаково распределены (как с.в. ξ) и независимы в совокупности (хотя достаточно было бы лишь их некоррелированности), тогда с.в. $W_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + s\xi_i)$ имеет математическое ожидание $a_n = na$, где $a = M[\ln(1 + s\xi)]$ и дисперсию $d_n = nd$, где $d = D[\ln(1 + s\xi)]$.

Теперь имеем $\ln(K_n/K) = W_n$, или $K_n/K = e^{W_n}$. Средняя скорость роста $\sqrt[n]{K_n/K} = e^{W_n/n}$. Рассмотрим с.в. $G(s) = W_n/n$. Из вышеуказанного следует, что $G(s)$ имеет математическое ожидание a и дисперсию d/\sqrt{n} (см. выше). Поэтому при больших n это будет приближенно постоянная величина a . Из всего этого вытекает, что для исследования максимизации средней скорости роста, равной $e^{G(s)}$, можно ограничиться исследованием с.в. $G(s)$, последнее же можно заменить исследованием максимизации математического ожидания этой с.в. Имеем

$$M[G(s)] = M[W_n/n] = M[\ln(1 + s\xi)].$$

14.2. Рост капитала при постоянной доле контрактов

Обозначим $M[\ln(1 + s\xi)]$ через $\varphi(s)$ и эту функцию исследуем на максимум, обозначая точку максимума через s^* . По смыслу, область определения функции φ есть $[0, \infty)$.

Можно рассматривать разные стратегии управления капиталом, например, рассмотрим стратегию постоянного s .

Предложение 1. Если $p = P(\xi \leq -1/s) > 0$, то разорение неизбежно. Среднее число периодов до разорения равно $1/p$.

Доказательство. Вероятность разорения за один период есть p , тогда $(1-p)p$ есть вероятность не разориться за 1-й период и разориться за 2-й и т.д. В результате получим, что веро-

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

ятность разорения $p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \dots = 1$, — следовательно, разорение неизбежно. Пусть ξ — период до разорения, включая последний, есть с.в., распределенная по закону геометрической прогрессии, ее среднее значение есть $1/p$.

Пусть $b = \inf\{c : P(\xi < c) > 0\}$.

Предложение 2. Если $P(\xi = b) > 0$ и $-1/s \geq b$ или если $P(\xi = b) = 0$ и $-1/s > b$, то при таком s неизбежно разорение.

Доказательство. Поскольку $P(\xi \leq -1/s) > 0$ при данном s , то можно сослаться на предложение 1.

Следствие 1. Если $P(\xi < c) > 0$ для всякого c , то любая стратегия с постоянным s ведет к разорению.

Рассмотрим случай дискретной (д.) с.в. ξ , пусть ее возможные значения есть a_i с вероятностями p_i .

Имеем: $\varphi(s) = \sum_i p_i \ln(1 + a_i s)$, $\varphi'(s) = \sum_i a_i p_i / (1 + a_i s)$,

$\varphi''(s) = -\sum_i a_i^2 p_i / (1 + a_i s)^2$. Отметим, что $\varphi'(0) = \sum_i a_i p_i = M[\xi]$.

Условие максимума для дискретного случая:

$$\sum_i a_i p_i / (1 + a_i s) = 0. \quad (14.1)$$

Предложение 3 (следствие из предложения 2). Если отрицательных возможных значений с.в. ξ нет, то нет и опасности разорения; если же есть отрицательные возможные значения, то при любом постоянном s , большем, чем $t = \inf\{-1/a_i : a_i < 0\}$, если наименьшего возможного отрицательного значения нет, или не меньше, чем $t = -1/\min a_i$, если такое наименьшее возможное значение есть, вероятность разорения равна 1. Средняя длительность до разорения равна $1/p$ (о величине p см. ранее, в доказательстве предложения 1).

Если разорения не допускать, то для нахождения s^* полезно следующее предложение.

Предложение 4: А) если $M[\xi] \leq 0$, то $s^* = 0$; Б) пусть $M[\xi] > 0$, тогда $0 < s^* < t$.

Действительно, на промежутке $[0, t)$ (о t см. в предложении 3) φ имеет обе первые производные, и если $M[\xi] \leq 0$, то, очевидно,

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

$s^* = 0$; если же $M[\xi] > 0$, то, поскольку $\lim_{s \rightarrow -0} \varphi(s) = -\infty$, φ' имеет нуль на промежутке $(0, 1)$. (Напомним, что $\varphi(0) = M[\xi]$.)

Замечание 1. Между двумя положительными числами $-1/a_i$, $-1/a_j$ находится нуль первой производной, и этот нуль есть точка максимума функции φ , однако исследование соответствующей ситуации сильно осложняется необходимостью заменить вышеуказанные рассуждения о росте капитала в силу опасности разорения за один период (об этом уже упоминалось выше, см. также далее — п. 5).

В случае непрерывной (н.) с.в. ξ пусть ее плотность вероятности есть $f(x)$, тогда условие максимума:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx / (1 + sx) = 0. \quad (14.2)$$

В случае произвольной с.в. ξ пусть ее функция распределения есть $F(x)$, тогда условие максимума:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) / (1 + sx) = 0. \quad (14.3)$$

Мы опустим исследование, связанное с возможностью обращения $1 + sx$ в нуль.

Пример 1. А) ξ есть д.с.в., принимающая значения 2, -1 с равной вероятностью.

Условие максимума (14.1) есть $2 \cdot (1/2) / (1 + 2s) - 1 \cdot (1/2) / (1 - s) = 0$, откуда получаем $s^* = 1/4$.

Итак, если капитал участника равен 400 д.е., то он приобретет 100 экземпляров рассматриваемой ценной бумаги (если у него хватит этой суммы, чтобы их купить, — это предполагается!). Но это только в начале 1-го периода.

Б) (формулы Келли — см. о них в [1]). Рассмотрим игру, в которой выигрыш a с вероятностью p и проигрыш a с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно s^* ?

Условие максимума (14.1) дает $s^* = (2p - 1)/a$. Это так называемая *первая формула Келли*.

Далее рассмотрим игру, в которой выигрыш b с вероятностью p и проигрыш a с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно s^* ?

Условие максимума (14.1) дает $s^* = (bp - a(1 - p)) / (ab)$. Это так называемая *вторая формула Келли*.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

В) ξ есть н.с.в., равномерно распределенная на промежутке $[-1, 2]$.

Условие максимума есть $\frac{dM}{ds}(3(1+s\xi))=0$. Выкладки приводят к трансцендентному уравнению $(1+2s)(1-s)=e^{3s}$. На промежутке $[0, 1]$ это уравнение имеет одно решение, приблизительно $s^* = 0,72$.

<http://>

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что в данной ситуации важны не значения с.в. ξ , а произведение $s\xi$. Это видно и по формулам (14.1)—(14.3).

14.3. Безгранично делимые и бесплатные рулетки и ценные бумаги

Кроме ценных бумаг, рассмотрим игру в рулетку с безгранично делимой ставкой.

Кратко повторим постановку задачи в этом случае. Участие в игре бесплатное. При ставке 1 выигрыш есть с.в. ξ . Можно сразу поставить ставку s , тогда выигрыш будет $s\xi$. Собственно говоря, в п. 14.1 было подробно изложено, как вести себя оптимально в данном случае — с постоянным s .

Вместо того чтобы участвовать в рискованных играх, особенно если выигрыш невелик, участник может положить деньги в банк и они будут нарастать со скоростью банковского процента α . Поэтому он должен решить, что ему выгоднее: участвовать в выше-указанной бесплатной лотерее или положить деньги в банк и довольствоваться банковским процентом.

Относительное приращение капитала равно:

α — если деньги положены в банк,

$s\xi$ — если участвовать в лотерее.

Следовательно, если $M[s\xi] > \alpha$, то надо участвовать в лотерее, иначе надо класть деньги в банк. Тем самым отсекаются не очень выгодные лотереи.

В реальности ценные бумаги, конечно, не являются безгранично делимыми, т.е. нельзя рассматривать и оперировать произвольными долями этих бумаг. Учет этого приводит к проблемам целочисленности, которые вовсе не являются чисто техническими (но здесь мы от них уклонимся). Однако нельзя уклониться от проблем, связанных с их стоимостью.

Предположим, что для их закупки участник рынка занимает деньги под банковский процент α . Если в начале периода он имеет капи-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

тал K , а бумага стоит C и ее приходится покупать под указанный процент, то при заказе бумаги для оправдания операции должно быть $Ks\xi - sK\alpha C > 0$, т.е. $M[\xi] > \alpha C$. Необходимость учета этого требования опять-таки отсекает в большинстве случаев выгодные лотереи.

<http://>

14.4. Еще одна стратегия управления капиталом

Как было указано выше, иногда s невозможно выбрать, чтобы избежать опасности разорения. Однако в такой ситуации можно попробовать использовать другую стратегию.

Рассмотрим следующую стратегию управления капиталом (в основных чертах своих реально используемую участниками финансового рынка). Участник рынка рискует не всем капиталом, а некоторой постоянной по величине суммой T , а все дополнительные доходы кладет в банк. Если он случайно указанную сумму «проиграет», то он не отчаивается, берет из накопленных в банке к этому моменту денег нужную сумму и продолжает с ней «играть».

Итак, пусть вначале у участника есть сумма B в банке, банковский процент равен α . Участник, кроме того, играет в бесплатную лотерею ξ с каким-то s и суммой-ставкой T . Тогда в конце n -го периода его капитал составит сумму T и в банке у него будет наращенная сумма $B(1+\alpha)^n + sT \sum_{i=1}^n (1+\alpha)^{n-i} \xi_i$ (учитывается нарастание по сложным процентам сумм, ранее положенных в банк). К сожалению, сумма независимых с.в. $(1+\alpha)^{n-i} \xi_i$ не удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы, тем не менее, кое-что сказать можно.

Предложение 5. Вероятность разорения в 1-м же периоде равна

$$P(\xi \leq -B(1+\alpha)/(sT)).$$

Таким образом, если $\inf\{c: P(\xi < c) > 0\} = -\infty$, то разорение возможно при этой стратегии при любой сумме B . Однако разорение не является неизбежным.

Итак, с такой стратегией можно не разориться. Плохо другое. Будем считать сумму $T = 1$, или, что то же самое, пусть $B/T = V$. Тогда после n периодов у участника в банке будет сумма $V(1+\alpha)^n + s \sum_{i=1}^n (1+\alpha)^{n-i} \xi_i$. Если средней скоростью роста капита-

тала за период считать $\sqrt[n]{M \left[s \sum_{i=1}^n (1+\alpha)^{n-i} \xi_i \right]}$, то несложные вычис-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

ления показывают, что эта скорость асимптотически стремится к $(1+\alpha)$. Значит, не следует играть в лотерею, а надо положить деньги в банк!

<http://>

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Пусть с равной вероятностью выигрыш равен 1 и $-0,1$. Каково s^* для максимально быстрого роста капитала?

2. Докажите, что если возможные выигрыши неотрицательные и есть хотя бы один положительный, то s надо брать как можно больше (теоретически бесконечно большим, но на практике величина s будет ограничена. Из-за каких обстоятельств?).

3. Докажите, что если с.в. ξ нормально распределена, то любая стратегия с постоянным s ведет к разорению.

У к а з а н и е. См. следствие 1.

4. При стратегии постоянного s отношение K_n/K_0 распределено логнормально (см. п. 14.1). Воспользовавшись формулами из п. 13.3 найдите математическое ожидание и дисперсию этого отношения.

5. Пусть с положительных выигрышей платится постоянный налог. Как это повлияет на выбор s ?

6. В п. 14.4 указано, что стратегия риска постоянной суммой может не привести к разорению. Приведите соответствующий пример.

Вот такой п р и м е р. Пусть ξ принимает значения: $-1, -2, \dots, -k, \dots$ с вероятностями соответственно $4^{-1}, 4^{-2}, \dots, 4^{-k}, \dots$ и с оставшейся вероятностью $11/15$ принимает значение $15/11$. Тогда математическое ожидание ξ будет более 10. Пусть $B/T = V = 1, \alpha = 0,1$. Пусть $s = 1$. Тогда вероятность разорения за 1-й период равна $p = P(\xi \leq -V(1+\alpha)) = P(\xi \leq -1,1) = 1/15$.

Следовательно, вероятность неразорения за 1-й период равна $(1-p) = 14/15$. При этом V увеличится за этот 1-й период в среднем не менее чем на 10, так что вероятность разориться на следующем периоде p_1 будет меньше, чем $p/2$, и т.д.

В итоге вероятность разорения будет меньше, чем $p + (1-p)p_1 + (1-p)(1-p_1)p_2 + \dots$, где $p_k < 2^{-k}$. Ясно, что эта сумма меньше 1.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 15 работы на заказ ОПЦИОНЫ <http://> И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ

Опционы являются производными ценными бумагами, производным финансовым инструментом. Организованная торговля ими началась только в 1973 г. В данной главе рассматриваются использование опционов для уменьшения риска финансовых операций, а также определение цены на них.

15.1. Опционы

Опцион на покупку (call-option) дает право его владельцу (держателю опциона) купить актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*). Цена эта называется *ценой исполнения*. Владелец опциона может отказаться от указанной покупки актива без всяких штрафов.

Аналогично опцион на продажу (put-option) дает право его владельцу продать актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*).

Далее рассматриваются только европейские опционы.

Тот, кто выписал опцион, т.е. продавец, несет определенное обязательство во все время действия опциона. В частности, если он выписал опцион на покупку, то несет обязательство обеспечить поставку актива по цене исполнения в момент исполнения опциона, а если он выписал опцион на продажу, то должен купить актив по цене исполнения в момент исполнения опциона.

Наоборот, держатель опциона никаких обязательств не несет, но он покупает опцион и платит выписавшему опцион некоторую сумму, называемую *премией* или просто *стоимостью опциона*.

Рассмотрим более подробно европейский опцион на покупку. Когда наступает дата исполнения опциона, то держатель опциона сравнивает рыночную цену на актив S и цену исполнения R , т.е. указанную в опционе. Если $S > R$, то он реализует свое право покупки актива по цене R , покупает актив по этой цене (и может немедленно же его продать и получить прибыль $S - R$). Но как фактически реализуется его право купить актив по более низкой цене, чем рыночная? Это право ему обеспечивает продавец опциона, поставляя физический актив или доплачивая разницу

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

$S - R$ держателем опциона (эти обязательства обеспечиваются специальным биржевым механизмом — клиринговой палатой, см. § 6.9). Держатель опциона оказывается в выигрыше и тем больше, чем больше разница $S - R$. Если рыночная цена не превышает цену исполнения, то держатель опциона незачем покупать актив. В этом случае он в проигрыше, так как за опцион он заплатил премию и она пропала зря.

Следовательно, опцион на покупку покупают тогда и те, кто надеется на повышение рыночной цены актива к дате исполнения опциона.

Аналогично обстоит дело и с опционом на продажу.

В зависимости от соотношения между ценой актива в момент продажи опциона S и ценой исполнения R , указанной в нем, опционы называются опционами с выигрышем, с нулевым выигрышем и с проигрышем. Для опционов колл (на покупку) это означает, что $S > R$, $S = R$ и $S < R$.

Торговля опционами — дело довольно сложное и происходит на биржах. Сегодня в мире опционов ежедневно продают и покупают миллионы штук. Дело, однако, редко доходит до поставки физических активов. Обычно проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами.

Как сказано выше, американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель такого опциона все время в напряжении: а вдруг сейчас и есть этот самый выгодный момент и дальше может быть только хуже. Из-за этой возможности выбора наивыгоднейшего момента американский опцион должен быть дороже; это подтверждают и теория, и практика.

15.2. Определение стоимости опциона на момент исполнения

При организованной торговле опционами они обезличены и становятся совершенно обычными ценными бумагами на предъявителя. Опцион может быть куплен или продан в любой момент до даты его исполнения. Определим его цену непосредственно перед исполнением (всякого рода издержками на оформление сделки и т.п. пренебрежем).

Итак, пусть рыночная цена актива S , цена исполнения R , а C — стоимость опциона на покупку. Ясно, что $C = S - R$, если $S > R$ и $C = 0$, если $S \leq R$. Это можно записать так: $C = \max\{0, S - R\}$. Аналогично в случае опциона на продажу его стоимость $C = \max\{0, R - S\}$.

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

Теперь отметим еще одно различие в позициях продавца и покупателя опциона. Купивший опцион сразу же несет убытки в размере цены опциона, который он купил. Но на этом все его убытки кончились. В будущем он может только получить доход, причем в случае опциона на покупку теоретически неограниченный — ведь его возможный доход — это разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения. Наоборот, продавший опцион сразу же получил доход в размере стоимости опциона, который он продал. Но на этом все его доходы кончились. Впереди его ждут только возможные убытки, причем в случае опциона на покупку теоретически неограниченные — эти возможные убытки есть разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения.

15.3. Ценообразование опционов на основе биномиальной модели

Идея оценки опциона состоит в создании безрискового портфеля путем покупки актива и продажи (выписки) нескольких опционов на покупку этого же актива. Последующий анализ этого портфеля позволяет определить стоимость опциона. Допустим, поведение цены актива описывается биномиальной однопериодной моделью.

Итак, пусть цена актива $S = 60$ д.е., такова же и цена исполнения опциона на покупку. Срок действия опциона европейского типа — один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью $1/2$ цена актива либо поднимается на 15 д.е., либо опустится на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен ничего платить. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля продавец опционов должен выписать 2 опциона на покупку.

Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля вынужден будет доплатить держателям опционов 30 д.е., во втором случае — ничего. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 45 д.е. независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдем, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $45/(1 + 0,1) = 41$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., поэтому два опциона вместе стоят $60 - 41 = 19$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 9,5 д.е. За такую цену оба опциона и должны быть проданы.

Интересно детально проследить за состоянием (богатством) продавца опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он выписал и продал два опциона, каждый по 9,5 д.е. Теперь у него денег 19 д.е. за проданные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и обязательства по обеспечению двух опционов, цена этих обязательств 19 д.е. и они образуют его пассив. Актив и этот пассив вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 41 д.е. К концу месяца 19 д.е. возрастут по безрисковой ставке до $19 \cdot (1 + 0,1) = 21$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастет по безрисковой ставке до $41 \cdot (1 + 0,1) = 45$ д.е. Всего у продавца опционов будет $21 + 45 = 66$ д.е. — в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60 \cdot (1 + 0,1) = 66$! Умелое хеджирование полностью оградило от риска.

15.4. Другой подход к ценообразованию опционов

Как было показано выше, при биномиальной модели (см. § 13.1) цена актива к концу n -го промежутка есть биномиально распределенная величина, которую можно представить в виде $S_n = S_0 + x_1 + \dots + x_n$, где случайные величины $x_i, i = 1, \dots, n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины принимающие два значения: 1, -1, с вероятностями 1/2 каждое. Пусть цена исполнения опциона равна S_0 , т.е. равна рыночной цене актива в настоящий момент 0. При этом предполагается, что $S_0 > n$.

Доход держателя опциона при исполнении опциона есть

$$C_n = \max \{0, S_n - S_0\} = \max \{0, x_1 + \dots + x_n\}.$$

Ограничимся, как и в предыдущем параграфе, только одним периодом, тогда $C = \max \{0, x_1\}$.

Понятно, что C — случайная величина. Так как торговля опционами носит массовый характер, то при определении их цены можно использовать средние числа. В частности, средний ожидаемый доход держателя опциона от одного опциона на покупку

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

есть математическое ожидание случайной величины C_1 , которое можно определить как математическое ожидание случайной величины $\max\{0, x_1\}$, т.е.

$$C_1 = \mathbb{E}[\max\{0, x_1\}].$$

Докажем, что это и есть «справедливая» цена опциона. При этом для упрощения примем, что безрисковая ставка равна 0. «Справедливость» цены означает, что продавец опциона сумеет обеспечить исполнение опциона и не более, т.е. никакой прибыли на выписке опциона он не заработает.

Далее опустим индекс у C_1 и x_1 . Докажем, что $C = 1/2$. Проще всего найти C , мысленно произведя над случайной величиной x большое число опытов, скажем, 100. При этом в 50 опытах x примет значение 1 и потому $M[\max\{0, x\}] = 1/2$.

Теперь покажем, как продавец опциона может распорядиться этой суммой, чтобы обеспечить исполнение опциона. Он берет в банке заем величиной $S_0/2 - 1/2$, добавляет к этой сумме вырученную за продажу опциона $1/2$ д.е. и на сумму $S_0/2$ покупает половину единицы актива. Итак, сейчас у него имеется единица актива и портфель, состоящий из долга банку, актива стоимостью $S_0/2$ и еще обязательства обеспечить исполнение опциона. Убедимся, что этот портфель безрисковый стоимостью 0.

В самом деле, если к моменту исполнения опциона цена актива увеличится на 1 д.е., то стоимость актива в портфеле увеличится до $1/2 \cdot (S_0 + 1)$, из этой суммы 1 д.е. пойдет держателю опциона, а остальное, т.е. $S_0/2 - 1/2$, — на погашение займа у банка. Если же цена актива упадет на 1 д.е., то держателю опциона ничего не надо платить, а актив портфеля будет продан за $1/2 \cdot (S_0 - 1)$ — это в точности долг банку.

Докажем далее, что опцион не может стоить меньше, чем C , в данном случае не может стоить меньше, чем $1/2$, ибо если он меньше $1/2$, то это не позволит продавцу опциона обеспечить исполнение опциона, что означало бы крах всей опционной торговли. В самом деле, если бы опцион стоил меньше и при этом продавец как-то умудрялся обеспечивать исполнение опционов, то покупатель опциона имел бы строго положительный доход. Это позволило бы ему створиться с продавцом опциона и они вместе построили бы «денежную машину»: продавец без конца выписывал бы опционы, покупатель их покупал, а этот строго положительный доход они бы делили, т.е. производили бы деньги из ничего. Но это невозможно.

В заключение остановимся на стоимости опциона в конце не одного расчетного периода, а многопериодного промежутка. Тогда

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

$C_n = M[\max\{0, x_1 + \dots + x_n\}]$ (цена исполнения по-прежнему равна цене на момент покупки опциона).

При $n > 10$ согласно Центральной Предельной Теореме, сумма $x_1 + \dots + x_n$ распределена приблизительно по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 0, дисперсия равна n . Следовательно, искомое математическое ожидание $M\{0, x_1 + \dots + x_n\}$ равно

$$\int_0^{\infty} 1/\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-x^2/2n} \cdot dx/2 = \sqrt{n/2\pi}.$$

Итак, для многопериодного расчетного промежутка стоимость опциона на покупку равна

$$C = \sqrt{n/(2\pi)}. \quad (15.1)$$

15.5. Создание с помощью опционов безрисковых портфелей

Пример создания такого портфеля приведен в § 15.4. При этом были использованы опционы на покупку, которые выписал владелец актива. Создать безрисковый портфель можно и с помощью опционов на продажу. Рассмотрим аналогичный пример.

Пусть цена актива S равна 60 д.е., такова же и цена исполнения опциона на продажу. Срок действия опциона европейского типа один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью 1/2 цена актива либо поднимется на 15 д.е., либо опустится на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором — не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен платить ничего. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля держатель актива должен купить 2 опциона на продажу. Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый.

В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля ничего не будет делать с купленными им опционами на продажу, во втором случае продавец опционов выплатит ему по 15 д.е. за опцион. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 75 д.е. независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисков, то его современную стоимость найдем, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $75/(1 + 0,1) = 68,2$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е. и поэтому два опциона вместе стоят $68,2 - 60 = 8,2$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 4,1 д.е. За такую цену оба опциона и должны быть куплены.

Проследим детально, как в § 15.4, за капиталом покупателя опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он купил два опциона, каждый по 4,1 д.е. Теперь у него денег $-8,2$ д.е. — долг за купленные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и два опциона, являющиеся фактически тоже активами, цена этих активов 8,2 д.е. Препятный актив и эти два опциона вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 68,2 д.е. К концу месяца $-8,2$ д.е. уменьшатся по безрисковой ставке до $-8,2 \cdot (1 + 0,1) = -9$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастает по безрисковой ставке до 75 д.е., всего у покупателя будет $75 - 9 = 66$ д.е. — в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60 \cdot (1 + 0,1) = 66$ д.е.! Умелое хеджирование, как и в § 15.4, полностью оградило покупателя от риска.

С помощью опциона на покупку можно застраховаться от излишне высокого повышения цены на интересующий актив и обеспечить его приобретение по сегодняшней цене. Это делается следующим образом.

Купим опцион на покупку этого актива по цене исполнения E и одновременно денежную сумму величиной $E \cdot (1 + b)^{-T}$, вложим в банк по безрисковой ставке b . К моменту исполнения опциона, т.е. через время T , эта сумма возрастет до E . Если цена актива к этому моменту не превысит E , то купим актив; иначе купим актив с помощью имеющегося у нас опциона на покупку.

Между стоимостями опционов на покупку и на продажу есть связь, известная как *теорема паритета опционов*.

Пусть C , P — стоимости соответственно опциона на покупку и опциона на продажу и S , E — цена актива в момент продажи-покупки опционов и соответственно цена исполнения. Тогда

$$P = C + E \cdot (1 + b)^{-T} - S, \quad (15.2)$$

где b — безрисковая ставка, T — время опциона.

Для доказательства этой формулы проведем два мысленных эксперимента.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

1. Приобретем актив по цене S и опцион на продажу с ценой исполнения E и стоимостью P , затратив всего $S + P$. Если цена актива в момент исполнения опциона превысит E , то актив сохраним, в противном случае актив продадим по цене E .

2. Купим опцион на покупку этого актива с ценой исполнения E и стоимостью C и одновременно вложим по безрисковой ставке b денежную сумму величиной $E \cdot (1 + b)^{-T}$, всего затратим $C + E \cdot (1 + b)^{-T}$; к моменту исполнения опциона, т.е. через время T , эта сумма возрастет по безрисковой ставке до E . Если цена актива к этому моменту не превысит E , то купим актив; иначе купим актив с помощью имеющегося у нас опциона на покупку.

В рамках рассматриваемой модели оба эксперимента дают в конце один результат: если цена актива к моменту исполнения опциона превысит E , то будем иметь актив, иначе — денежную сумму E . Следовательно, и в начале этих экспериментов наш капитал должен быть одинаковым, т.е. должно быть $S + P = C + E \cdot (1 + b)^{-T}$, откуда и следует формула (15.2). Если цена исполнения опционов совпадает с сегодняшней рыночной ценой актива, то опцион на покупку дороже опциона на продажу.

В заключение отметим, что различным расчетам, связанным с опционами, посвящено огромное число научных работ. Начало этому положили работы Ф. Блэка и М. Шоулса в 1973 г. и Р.С. Мертона (в то же время), посвященные ценообразованию опционов. Эти работы без преувеличения совершили революцию в финансовых расчетах.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите два опциона на покупку, во всем одинаковых, но с разными ценами исполнения. Какой опцион дороже?
2. Ответьте на тот же вопрос относительно стоимости опционов на продажу.
3. В однопериодной биномиальной модели для создания безрискового портфеля надо продать 2 опциона. Сколько опционов надо продать для той же цели в многопериодной биномиальной модели?
4. Проведите подробный вывод формулы (15.1).

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 16 работы на заказ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ

На финансовом рынке обращается, как правило, множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, муниципальные облигации, корпоративные акции и т.п. Если у участника рынка есть свободные деньги, то их можно отнести в банк и получать проценты или купить на них ценные бумаги и получать дополнительный доход. Но в какой банк отнести? Какие ценные бумаги купить? Малорисковые ценные бумаги, как правило, и мало доходны, высокодоходные, как правило, более рискованные. Экономическая наука может дать некоторые рекомендации для решения этого вопроса.

Итак, инвестор ищет на финансовом рынке активы, способные удовлетворить его пожелания относительно доходности и рискованности. Это — его спрос на рынке.

16.1. Постановка задачи об оптимальном портфеле

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг. Предваряя точные математические постановки, констатируем очевидную общую цель инвестора — вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его *портфелем*. Стоимость портфеля — это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Если сегодня его стоимость есть P , а через год она окажется равной P' , то $(P' - P)/P$ естественно назвать доходностью портфеля в процентах годовых. То есть *доходность портфеля* — это доходность на единицу его стоимости.

Пусть x_i — доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг i -го вида. Рассуждения о долях эквивалентны тому, что весь выделенный капитал принимается за единицу. Пусть d_i — доходность в процентах годовых ценных бумаг i -го вида в расчете на одну денежную единицу.

Найдем доходность всего портфеля d_p . С одной стороны, через год капитал портфеля будет равен $1 + d_p$, с другой — стои-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

мость бумаг i -го вида увеличится с x_i до $x_i + d_i x_i$, так что суммарная стоимость портфеля будет $\sum_i (x_i + d_i x_i) = \sum_i x_i d_i$. Приравнявая оба выражения для стоимости портфеля, получаем

$$d_p = \sum_i x_i d_i. \quad (16.1)$$

Итак, задача увеличения капитала портфеля эквивалентна аналогичной задаче о доходности портфеля, выраженной через доходности бумаг и их доли формулой (16.1).

Как правило, доходность бумаг колеблется во времени, так что будем считать ее случайной величиной. Пусть m_i , σ_i — средняя ожидаемая доходность и среднее квадратическое отклонение (СКО) этой случайной доходности, т.е. $m_i = M[d_i]$ — математическое ожидание доходности и $r_i = \sqrt{V_{ii}}$, где V_{ii} — вариация или дисперсия i -й доходности. Будем называть m_i , r_i соответственно эффективностью и риском i -й ценной бумаги. Через V_{ij} обозначим ковариацию доходностей ценных бумаг i -го и j -го видов (или корреляционный момент K_{ij}).

Так как доходность составляющих портфель ценных бумаг случайна, то и доходность портфеля есть также случайная величина. Математическое ожидание доходности портфеля есть $M[d_p] = x_1 M[d_1] + \dots + x_n M[d_n] = \sum_i x_i m_i$, обозначим его через m_p . Дисперсия доходности портфеля есть $D[d_p] = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Так же, как и для ценных бумаг, назовем m_p эффективностью портфеля, а величину $\sigma_p = \sqrt{D[d_p]}$ риском портфеля r_p . Обычно дисперсия доходности портфеля называется его вариацией V_p .

Итак, эффективность и риск портфеля выражены через эффективности составляющих его ценных бумаг и их совместные ковариации.

Пример 1. Портфель наполовину (по стоимости) состоит из бумаг первого вида с доходностью 14% годовых и из бумаг второго вида с доходностью 8% годовых. Какова эффективность портфеля?

Решение. Оба термина — доходность и эффективность — специально упомянуты вместе.

Ответ: $0,5 \cdot 14 + 0,5 \cdot 8 = 11\%$ годовых.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с дилеммой: хочется иметь эффективность побольше, а риск поменьше.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

ше. Однако поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать оптимальный выбор между эффективностью и риском (этот выбор в конечном счете определяется отношением ЛПР к эффективности и риску). <http://www.diplom.ru> (дополнение к ч. II).

Рассмотрим два портфеля ценных бумаг. Так как портфель оценивается по двум характеристикам — эффективности и риску, то между портфелями есть отношение доминирования. Скажем, что 1-й портфель с эффективностью e_1 и риском r_1 доминирует 2-й с e_2 , r_2 , если $e_1 \geq e_2$ и $r_1 \leq r_2$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Недоминируемые портфели назовем *оптимальными по Парето*,

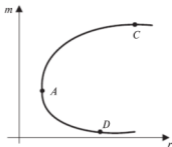


Рис. 16.1

такие портфели называют еще *эффективными*. Конечно, инвестор должен остановить свой выбор только на эффективных портфелях.

Если рассмотреть какое-нибудь множество портфелей и нанести их характеристики — риск r_p и эффективность m_p на плоскость риск—доходность, то типичное множество эффективных портфелей выглядит, как кривая DAC на рис. 16.1.

16.2. Диверсификация портфеля

Любой инвестор заинтересован в уменьшении риска портфеля при поддержании его эффективности на определенном уровне. Какие существуют рекомендации общего характера по снижению риска портфеля?

Пусть в портфеле собрано N различных видов ценных бумаг. Рассмотрим дисперсию портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Разобьем слагаемые на две группы:

$V_p = \sum_i x_i^2 V_{ii} + \sum_{i \neq j} x_i x_j V_{ij}$. В первой группе

слагаемых N , во второй — $N(N-1)$. Предположим для простоты, что стоимость портфеля распределена равными долями по этим видам ценных бумаг, т.е. все $x_i = 1/N$. Тогда по формулам для дисперсии имеем $V_p = (1/N^2) \sum_i V_{ii} + (1/N^2) \sum_{i \neq j} V_{ij} =$

$= (1/N) (\sum_i V_{ii}/N) + (N-1/N) (\sum_{i \neq j} V_{ij}/[N(N-1)])$. Величина $(\sum_i V_{ii}/N)$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

может быть названа средней дисперсией ценных бумаг, входящих в портфель, а дисперсия $\sum_{i \neq j} V_{ij} V_{ij}$ — дисперсией их средней кова-

риацией. Поэтому предыдущую формулу можно выразить словами: дисперсия портфеля равна $(1/N)$ средней дисперсии плюс $(1 - 1/N)$ средней ковариации. Это и есть эффект диверсификации портфеля: с ростом числа входящих в портфель ценных бумаг в его дисперсии (и риске) вклад средней дисперсии (среднего риска) становится все меньше, зато все больше — вклад средней ковариации. Так что если входящие в портфель ценные бумаги мало коррелированы друг с другом, то дисперсия портфеля уменьшается с ростом числа входящих в портфель бумаг.

В реальности, однако, практически все ценные бумаги, обращающиеся на рынке, испытывают воздействие общеэкономических факторов и изменяются под их воздействием. Это приводит к тому, что их взаимная корреляция является вполне заметной величиной. Эта взаимная корреляция обуславливает так называемый *рыночный*, или *систематический*, *риск портфеля*. На рис. 16.2 показано возможное поведение риска портфеля при увеличении числа ценных бумаг в нем.

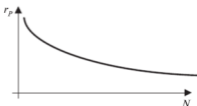


Рис. 16.2

индивидуальный, или *несистематический*, *риск* ценной бумаги.

Диверсификация портфеля может почти полностью устранить влияние на риск всего портфеля индивидуального риска отдельных ценных бумаг, но она не в силах устранить рыночный риск всего портфеля.

Рассмотрим более конкретно упрощенные примеры влияния корреляции разных ценных бумаг. Предположим сначала, что ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда $V_p = \sum_i x_i^2 V_{ii}$ и $\sum_i x_i = 1$.

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = 1/n$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $m_p = (\sum_i m_i)/n$ — средняя

Конечно, в силу особенностей работы эмитентов ценных бумаг каждая конкретная ценная бумага испытывает свои колебания эффективности, иногда совершенно не связанные с общеэкономическими. Эти колебания обуславливают так называемый *индивидуальный*, или *несистематический*, *риск* ценной бумаги.

Узнайте стоимость

написания студенческой

ожидаемая эффективность портфеля, и риск портфеля равен

$$r_P = \sqrt{\sum_i V_{ii}} / n. \text{ Риск } \sigma_P = \sqrt{\sum_i V_{ii}} / n.$$

работы на заказ

<http://>

Отсюда вы в о д: если ценные бумаги некоррелированы, то при росте числа их видов n в портфеле риск портфеля ограничен и стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Пример 2. Предположим, инвестор имеет возможность составить портфель из четырех видов некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых даны в таблице.

i	1	2	3	4
e_i	2	4	8	12
σ_i	1	2	4	6

Рассмотрим несколько вариантов составления портфеля из этих бумаг равными долями. Напомним, что эффективность портфеля есть среднее арифметическое эффективностей, а риск в данном случае $r = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} / n$ (см. также пример 1 из § 12.1).

А) Портфель образован только из бумаг 1-го и 2-го видов.

Тогда $m_{12} = (2 + 4)/2 = 3$; $r_{12} = \sqrt{1^2 + 2^2}/2 \approx 1,12$.

Б) Портфель образован только из бумаг 1-го, 2-го и 3-го видов.

Тогда $m_{1-3} = (2 + 4 + 8)/3 = 4,67$; $r_{1-3} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}/3 \approx 1,53$.

В) Портфель образован из бумаг всех четырех видов. Тогда

$m_{1-4} = (2 + 4 + 8 + 12)/4 = 6,5$; $r_{1-4} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2}/4 \approx 1,89$.

Как видим, при составлении портфеля из все большего числа ценных бумаг риск растет весьма незначительно, а эффективность растет быстро.

Однако, как указано выше, полная некоррелированность ценных бумаг по существу невозможна.

Рассмотрим теперь, как отражается корреляция между видами ценных бумаг на характеристиках портфеля. Корреляция не влияет на эффективность портфеля, ибо $m_P = \sum_i x_i m_i$, но она сказывается

на его вариации, дисперсии или риске, ибо $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$.

Введем в рассмотрение величины $k_{ij} = V_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$ — в курсе теории вероятностей они называются коэффициентами корреляции.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Тогда $V_{ij} = (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)k_{ij}$. Для того чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим два случая.

Сначала случай полной прямой корреляции, когда все $k_{ij} = 1$ — это значит, что при изменении фактора j -й также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда $V_p = \sum_i \sum_j \sigma_i x_i \sigma_j x_j =$

$= \left(\sum_i \sigma_i x_i \right)^2$. Если при этом вложить деньги равными долями, т.е.

$x_i = 1/n$, то $V_p = \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 / n^2$ и риск портфеля $r_p = \sum_i \sigma_i / n$. Если

$\sigma_i \geq \gamma$, то и $r_p \geq \gamma$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта — риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и не стремится к нулю при росте числа видов ценных бумаг.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону. Диверсификация портфеля путем покупки обеих бумаг бесполезна — риск портфеля от этого не уменьшится.

Теперь рассмотрим ситуацию полной обратной корреляции, т.е. когда $k_{ij} = -1$, если $i \neq j$. Для понимания сути дела достаточно рассмотреть портфель, состоящий всего из двух видов ценных бумаг ($n = 2$). Тогда $V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$ и если $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$, то $V_p = 0$.

Таким образом, при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Полная обратная корреляция довольно редкое явление и обычно она очевидна.

16.3. Портфель Марковица минимального риска

Рассмотрим сначала математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 г., за что позднее получил Нобелевскую премию.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Найдем x_i , минимизирующие вариацию портфеля

$$r_p = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}} \quad (16.2)$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля m_p , т.е. $\sum_i x_i m_i = m_p$.

Поскольку x_i — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

В такой постановке минимизация вариации равносильна минимизации риска портфеля, поэтому задача Марковица может быть сформулирована следующим образом.

Найти x_i , минимизирующие риск портфеля

$$r_p = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}}$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля m_p , т.е.

$$\sum_i x_i m_i = m_p;$$

поскольку x_i — доли, то в сумме они должны составлять единицу:

$$\sum_i x_i = 1.$$

Решение (оптимальное) этой задачи обозначим значком «*». Если $x_i^* \geq 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_i^* личного капитала в ценные бумаги i -го вида. Если же $x_i^* < 0$, то содержательно это означает провести операцию «short sale» («короткая продажа»). Если такие операции невозможны, значит, необходимо ввести ограничения $x_i^* \geq 0$.

Что это за операция? Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги i -го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент. Эти деньги он присоединяет к своему капиталу и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (т.е. не i -го вида) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше! Собственно, можно обойтись и без операции «short sale», если инвестору доступны займы денежных средств по безрисковой ставке.

Этот портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности называется *портфелем Марковица минималь-*

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

ного риска. Ясно, что его риск r_p есть функция его заданной эффективности m_p .

Пример 3. С помощью компьютера найден оптимальный портфель Марковица для трех ценных бумаг с эффективностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности задана равной 15. Доли бумаг оказались равными: 46%, 28%, 26%, минимальный риск — 25,4, доходность оказалась равной заданной — 15.

16.4. Портфель Тобина минимального риска

Через несколько лет после исследования Марковица другой крупнейший американский экономист Д. Тобин (D. Tobin — также впоследствии лауреат Нобелевской премии) заметил, что если на рынке есть безрисковые бумаги (к таким можно с некоторой натяжкой отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается и приобретает замечательное новое качество.

Пусть m_0 — эффективность безрисковых бумаг (фактически это безрисковая банковская ставка, в СССР таковой можно было считать годовую процентную ставку Сбербанка по вкладам до востребования, она была 2–3%), а x_0 — доля капитала, в них вложенного, тогда в рисковую часть портфеля вложена $(1 - x_0)$ часть всего капитала. Пусть m_r — эффективность и V_r — вариация (дисперсия) рискованной части портфеля и $r_r = \sqrt{V_r}$ — риск этой рискованной части. Тогда эффективность всего портфеля равна $m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r$, вариация портфеля равна $V_p = (1 - x_0)^2 V_r$ и риск портфеля равен $r_p = (1 - x_0) r_r$ (считается, что безрисковые бумаги некоррелированы с остальными). Исключая x_0 , получим $m_p = m_0 + r_p (m_r - m_0) / r_r$, т.е. эффективность портфеля линейно зависит от его риска. Рисковые виды ценных бумаг будем нумеровать числами от 1 до n .

Задача Марковица об оптимальном портфеле в этом случае такова:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij} &\rightarrow \min, \\ x_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i m_i &= m_p, \\ x_0 + \sum_{i=1}^n x_i &= 1. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

Изложим теперь окончательное решение этой задачи, полученное Тобином. Пусть V — матрица ковариаций рисков видов ценных бумаг, $X = (x_i)$, $m = (m_i)$ — вектор-столбцы долей x капитала, вкладываемых в i -й вид рисков ценных бумаг и ожидаемых эффективностей этого вида, $i = 1, \dots, n$. Пусть также I — n -мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда оптимальное значение долей x_i есть

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I) V^{-1} (M - m_0 I)} V^{-1} (M - m_0 I). \quad (16.4)$$

Здесь V^{-1} — матрица, обратная к V . В числителе дроби стоит число, в знаменателе, если выполнить все действия (операция транспонирования первого сомножителя в знаменателе не указана, но подразумевается), тоже получится число, причем константа, определяемая рынком и не зависящая от инвестора, $V^{-1}(M - m_0 I)$ — вектор-столбец размерности n . Как видим, этот вектор не зависит от эффективности портфеля m_p . Таким образом, вектор долей рисков видов ценных бумаг, пропорциональный этому вектору, также не зависит от m_p . Следовательно, структура рисковей части портфеля не зависит от m_p . Однако сумма компонент вектора X^* зависит от m_p , а именно, компоненты вектора X^* пропорционально увеличиваются с ростом m_p , поэтому доля x_0 безрисковых вложений будет при этом сокращаться.

Выразим риск оптимального портфеля в зависимости от его доходности. Для этого в формулу вариации портфеля $V_p = X^T V X$ подставим оптимальный вектор X^* из формулы (16.4), обозначив знаменатель формулы (16.3) через d^2 . Получим

$$\begin{aligned} V_p &= \left[(m_p - m_0)^2 / d^4 \right] \left[V^{-1} (M - m_0 I) \right]^T V \left[V^{-1} (M - m_0 I) \right] = \\ &= \left[(m_p - m_0)^2 / d^4 \right] (M - m_0 I) V^{-1} (M - m_0 I) = \\ &= (m_p - m_0)^2 / d^2. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$V_p = (m_p - m_0)^2 / d^2, \text{ или } r_p = (m_p - m_0) / d.$$

Можно также написать выражение эффективности оптимального портфеля от его риска: $m_p - m_0 = dr_p$ или $m_p = m_0 + dr_p$. Видно, что зависимости эти линейные.

Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина минимального риска*, т.е. портфель Тобина — это портфель Марковица при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг.

Узнайте стоимость

написания студенческой

16.5. Портфель Марковица и Тобина

максимальной эффективности
работы на заказ

<http://>

Постановку Марковица задачи формирования оптимального портфеля (16.2) или (16.3) можно сформулировать так: сформировать портфель минимального риска из всех портфелей, имеющих эффективность не менее заданной.

Но столь же естественна и задача формирования портфеля максимальной эффективности из всех портфелей, имеющих риск не более заданного:

Найти x_i , максимизирующие ожидаемую эффективность портфеля

$$m_p = \sum_i x_i m_i \rightarrow \max$$

при условии, что обеспечивается заданное значение риска

портфеля, т.е. $\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_p^2$;

поскольку x_i — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

Назовем данную формализацию *портфелем Марковица максимальной эффективности*.

Пример 4. С помощью компьютера найден оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг с доходностью и риском: (4,10); (10,40); (40, 80) (те же ценные бумаги, что и в примере 1); верхняя граница риска задана равной 50. Доли бумаг оказались равными: 6%, 34%, 60%, эффективность — 27,6, риск — 49,9 (компьютер перебирал доли ценных бумаг с шагом 0,02 — этим и объясняется несовпадение риска с заданным).

Если на рынке есть безрисковые бумаги, то задача формирования портфеля максимальной эффективности имеет решение, похожее на решение Тобина (см. § 16.3):

Оптимальное значение долей x рискованных бумаг есть

$$X^* = \frac{r_p}{\sqrt{(M - m_0 I) V^{-1} (M - m_0 I)}} V^{-1} (M - m_0 I). \quad (16.5)$$

В матрично-векторной форме задача формирования портфеля максимальной эффективности при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг такова:

$$x_0 m_0 + MX \rightarrow \max,$$

$$XVX = r_p^2,$$

$$x_0 + IX = 1$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

(операция транспонирования подразумевается, как и прежде, см. комментарий к формуле (16.4)).

Для нахождения условного максимума составим функцию Лагранжа:

$$L = x_0 m_0 + MX + \lambda_0 (XVX - r_p) + \lambda_1 (x_0 + IX - 1).$$

Находим частные производные L по X и по x_0 и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} dL/dX = 0 \\ dL/dx_0 = 0 \end{cases}, \text{ получаем } \begin{cases} m_0 + \lambda_1 = 0, \\ M + \lambda_0 VX + \lambda_1 I = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения λ_1 и подставим в первое, получим $M - m_0 I = -x_0 VX$, так что $X = (-1/\lambda_0)V^{-1}(M - m_0 I)$.

Для нахождения λ_0 подставим найденное X в равенство $XVX = r_p^2$, получим

$$(-1/\lambda_0)(M - m_0 I)V^{-1}V(-1/\lambda_0)V^{-1}(M - m_0 I) = r_p^2,$$

(так как матрица V симметрична, то транспонированная обратная к ней матрица совпадает с обратной же). Далее имеем

$$\left[(-1/\lambda_0)^2\right] (M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I) = r_p^2.$$

Обозначая $(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)$ через d^2 , получаем $(-1/\lambda_0) = r_p/d$ и окончательно $X^* = (r_p/d)V^{-1}(M - m_0 I)$, т.е. формулу (16.5).

Опять видно, что структура рисковей части оптимального в этом смысле портфеля также не зависит от ограничения на величину риска.

Выразим эффективность портфеля максимальной эффективности в зависимости от заданного его риска r_p , т.е. найдем величину $x_0^* m + MX^*$, где x_0^* и X^* — оптимальные доли вложений. Имеем $x_0^* = 1 - IX^*$, подставляя это выражение и X из формулы (16.5), получаем $x_0^* m + MX^* = (1 - I(r_p/d)V^{-1} \cdot (M - m_0 I))m_0 + M(r_p/d)V^{-1}(M - m_0 I) = m_0 + (r_p/d)(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I) = m_0 + dr_p$. Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина максимальной эффективности*.

Замечание 1. Обратим внимание, что структура рисковей части оптимального портфеля одна и та же в обеих постановках и не зависит от задаваемых доходности или риска портфеля.

Замечание 2. В реальности, однако, редко кто из инвесторов озабочен составлением оптимальных портфелей. Обычно

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

инвесторы создают специализированные портфели, содержащие ценные бумаги какого-либо определенного профиля: по отрасли промышленности, государственные или какого-нибудь пенсионного фонда и т.п.

<http://>

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Проверьте доходность и риск портфелей из примеров 3, 4.

2. Из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями 2 и 6 и рисками 10 и 20 с помощью компьютера составлено шесть портфелей: в портфеле с номером k доля первых бумаг $x = 1 - 0,2k$, доля вторых равна $(1 - x)$, т.е. портфель, состоящий только из бумаг 1-го вида, получает номер 0, а портфель, состоящий только из бумаг 2-го вида, получает номер 5. Компьютер нашел их эффективности и риски.

Эффективности	2,0	2,8	3,6	4,4	5,2	6,0
Риски	10,0	8,9	10,0	12,6	16,1	20
Портфели	0	1	2	3	4	5

Проверьте компьютерные расчеты. Затем нанесите портфели как точки на плоскость риск—эффективность и отметьте доминируемые и недоминируемые портфели, т.е. оптимальные по Парето.

3. Имея безрисковые ценные бумаги с эффективностью 4 и некоррелированные рисковые с эффективностями 8 и 14 и рисками 10 и 30, с помощью компьютера составили портфель Тобина эффективности 12. Доли бумаг получились такими: $-0,51$; $1,18$; $0,33$. Проверьте компьютерные расчеты. Как понимать отрицательную долю безрисковых бумаг?

4. В портфеле бумаги с доходностью 5% годовых составляют 30% по стоимости, а остальные бумаги имеют доходность 8% годовых. Какова доходность портфеля?

5. Сформировать портфель Тобина минимального риска из двух видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и рисковых с эффективностью 10 и риском 5. Найти зависимость эффективности портфеля от его риска.

Решение. Задача формирования оптимального портфеля в данной ситуации (см. формулу (16.2)):

$$\begin{aligned} 5x_1 &\rightarrow \min, \\ 2x_0 + 10x_1 &= m_P, \\ x_0 + x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Отсюда $x_0 = (10 - m_p)/8$, $x_1 = (m_p - 2)/8$. Тогда $m_p = 2 + 8x_1^* = 2 + 8r_p/5$.

6. Решить задачу формирования портфеля Тобина минимального риска при наличии безрисковых бумаг и некоррелированных остальных в общем виде.

Решение. Используем формулу (16.4). Матрица V ковариаций рисков видов ценных бумаг является в данном случае диагональной, обратная к ней также диагональная:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ 0 & & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Произведя необходимые вычисления, получаем вектор долей рисков бумаг

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{\sum_{i=1}^n (m_i - m_0)^2 / \sigma_i^2} \begin{pmatrix} (m_1 - m_0) / \sigma_1^2 \\ \vdots \\ (m_n - m_0) / \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

7. Сформировать портфель Тобина максимальной эффективности и риска не более заданного из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и некоррелированных рисков ожидаемой эффективности 4 и 10 и рисками 2 и 4. Каковы соотношения доли бумаг в рисковей части оптимального портфеля?

Решение. Итак, $m_0 = 2$, $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Ограничим риск портфеля величиной r_p . Воспользуемся формулой (16.4):

$$X^* = (r_p / d) V^{-1} (M - m_0 I)$$

Матрицу, обратную к V , найдем методом миноров:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}. \quad \text{Вычислим} \quad d^2 = (M - m_0 I)^T V^{-1} (M - m_0 I) = \\ = (M - m_0 I)^T [V^{-1} (M - m_0 I)] = (2; 8) \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = (2; 8) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 5.$$

Окончательно вектор долей рисков бумаг $X^* = (r_p / \sqrt{5}) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, рисковые доли должны быть одинаковы и каждая из них равна $r_p / \sqrt{20}$. Следовательно, $x_0^* = 1 - r_p / \sqrt{5}$.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

8. Поставить обе задачи сформировать портфель Тобина: минимального риска при заданной эффективности и максимальной эффективности при заданном риске из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью r_f и рискововых с ожидаемой эффективностью \bar{r} и рисками σ_1 и σ_2 и взаимной корреляцией ρ .

Отвечает:

$$\begin{aligned} 16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2 \rightarrow \min, & \quad 2x_0 + 6x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_0 + 6x_1 + 8x_2 = m, & \quad 16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2 = r_p^2, \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1, & \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

9. Запишем вариацию доходности портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$

так: $V_p = \sum_i x_i \left(\sum_j x_j V_{ij} \right)$ и назовем величину $R_i = \sum_j x_j V_{ij}$ портфельной ковариацией доходности i -й ценной бумаги. Оказывается, что в оптимальном портфеле эти ковариации пропорциональны превышению эффективности ценных бумаг над безрисковыми вложениями (подразумевается, что последние на рынке имеются).

Действительно, вектор портфельных ковариаций $R = VX^*$, где X^* — вектор долей рискововых вложений. В оптимальном портфеле X^* определяется формулами (16.4), (16.5), т.е. имеет вид: $X^* = \gamma V^{-1}(M - m_0I)$, где γ — скаляр, равный $(m_p - m_0)/d^2$ или r_p/d .

Подставляя X^* из этих выражений, получим $R = \gamma V V^{-1}(M - m_0I) = \gamma (M - m_0I)$, т.е. видно, что векторы R и $(M - m_0I)$ пропорциональны.

10. Докажите, что характеристики портфелей Тобина будут действительно равны заданным.

Указание. Используйте формулы (16.4) и (16.5).

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 17 работы на заказ ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕДУЩЕГО ФАКТОРА ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Цель анализа финансового рынка — разработка рекомендаций для инвесторов — в какие ценные бумаги вкладывать капитал и в каком количестве. Выше было рассмотрено решение задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг. Однако оно носит формальный характер, поскольку опирается на предположение о том, что доходности вложений в ценные бумаги являются случайными величинами с заданными вероятностными характеристиками. Фактически требуется знание математических ожиданий и ковариаций доходностей. Откуда взять эти величины? Как их найти, учитывая имеющуюся информацию?

17.1. Прямой статистический подход

В развитых странах регулярно публикуются сведения о биржевом курсе ценных бумаг, прежде всего акций ведущих компаний. Таким образом, можно проанализировать последовательности, отражающие историю курсов и выплачиваемых дивидендов за достаточно длительный период.

Пусть значения доходностей d образуют ряд чисел (d_1, \dots, d_n) . Можно применить методы математической статистики и найти среднее $\bar{d} = \sum_i d_i/n$ и оценку дисперсии или вариации

$$\mathbb{E} = \sum_i (d_i - \bar{d})^2/n$$

и затем использовать их в качестве приближенных значений математического ожидания и дисперсии или вариации. Примерно так же можно поступить с ковариациями.

Реальные цифры таковы. Число ведущих компаний, акции которых котируются на биржах США и составляют основную (по общей стоимости) часть рынка, обычно оценивается в $n = 500$ (такое число учитывается в наиболее популярном издании «Standard and Poor's index»). Длительность ежеквартальных временных рядов, имеющих смысл для статистической обработки, $T = 100$

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

(экономические условия и даже список ведущих компаний за период более 25 лет существенно сильно изменяются, чтобы столь устаревшие данные считать представляющими ту же генеральную совокупность).

Таким образом, имеется $n \cdot n = 5000$ чисел, а оценить нужно $n = 500$ средних и $n(n - 1)/2 > 100\,000$ ковариаций, т.е. оценить нужно намного больше величин, чем имеем данных, в силу чего точность оценок не может быть хорошей. Поэтому прямой статистический подход для получения оценок ковариаций малоприменим, хотя необходим для нахождения средних (и тем самым для оценки математических ожиданий).

17.2. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка

Выход был найден — это анализ зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от ведущих факторов финансового рынка. Что же такое ведущий фактор?

Как уже подчеркивалось, в экономической жизни все взаимосвязано, но есть факторы, которые влияют сразу практически на все показатели. Например, уровень цен на ближневосточную нефть влияет на котировку акций почти всех компаний США, поскольку эта нефть покрывает более половины энергетических потребностей США. Если цена на нефть поднимется, станет дороже бензин для автомобилей, уменьшится спрос на бензин, на автомобили, на металл для их изготовления, повысятся цены на сельскохозяйственные продукты, поскольку затраты на топливо — основной компонент их себестоимости.

Рассмотрим один из таких ведущих факторов, не определяя пока его природу. Обозначим его f и будем считать, что доходности всех ценных бумаг зависят от него. Пусть d — доходность какой-нибудь фиксированной ценной бумаги. Простейшая форма зависимости — линейная, так что примем гипотезу, что d линейно зависит от f : $d \approx a + bf$. Так как обе величины d, f случайны, то равенство вряд ли может быть точным, поэтому использован знак приближенного равенства. Как найти константы a, b ? Рассмотрим эту задачу в общем случае, для произвольных двух случайных величин X, Y .

Попробуем подобрать линейную зависимость $y = a + bx = \varphi(x)$ такую, чтобы $F(a, b) = M[(Y - a - bX)^2]$ было минимальным. Имеем $F(a, b) = M[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = M[Y^2] - 2aM[Y] - 2bM[XY] + a^2 + 2abM[X] + b^2M[X^2]$. Диффе-

Узнайте стоимость

написания студенческой

рецензируя $f(a, b)$ частным образом по a и b и приравнивая частные производные 0, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + bM[X] = M[Y], \\ aM[X] + bM[X]^2 = M[XY]. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$b = K_{XY}/D_X, \quad a = M[Y] - M[X] \cdot K_{XY}/D_X,$$

значит, искомая линейная зависимость есть $y = \varphi(x) = (M[Y] - M[X] \cdot K_{XY}/D_X) + x \cdot K_{XY}/D_X = M[Y] + (x - M[X])K_{XY}/D_X$.

Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = M[Y] + (X - M[X])K_{XY}/D_X$, являющейся функцией от случайной величины X . Имеем $M[Z] = M[Y]$. Значит, в частности, при найденных a, b для математических ожиданий с.в. X, Y верно не приближенное равенство, а точное:

$$M[Y] = a + bM[X]. \quad (17.1)$$

На практике совместное распределение случайных величин (X, Y) неизвестно, известны только результаты наблюдений, т.е. выборка пар (x, y) значений (X, Y) . Все рассмотренные величины заменяются их выборочными аналогами. Так, для определения a, b получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b\bar{X} = \bar{Y}, \\ a\bar{X} + b\bar{X}^2 = \bar{XY}, \end{cases} \quad (17.2)$$

где, напомним, $\bar{X} = \left(\sum_i x_i\right)/n$, $\bar{Y} = \left(\sum_i y_i\right)/n$, $\bar{X}^2 = \left(\sum_i x_i^2\right)/n$, $\bar{XY} = \left(\sum_i x_i y_i\right)/n$.

Решая эту систему, получим $b = (\bar{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y})/(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) = \hat{\kappa}_{XY} \sqrt{s_X^2}$, $a = \bar{Y} - \bar{X} \hat{\kappa}_{XY} \sqrt{s_X^2}$, значит, прямая линия регрессии имеет уравнение $y = \bar{Y} + (x - \bar{X}) \hat{\kappa}_{XY} \sqrt{s_X^2}$. Через $\hat{\kappa}_{XY}$, s_X^2 обозначаем выборочные аналоги корреляционного момента случайной величины X, Y и дисперсии X соответственно.

Кстати, как можно убедиться, для средних арифметических значений верно точное равенство

$$\bar{Y} = a + b \cdot \bar{X}. \quad (17.3)$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Пример 1. Найти оценки параметров линейной регрессии по выборке (9, 6), (10, 4), (12, 7), (5, 3). Изобразить заданные точки и прямую регрессии в системе координат OXY .

Решение. Находим $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}^2, \bar{Y}^2, \bar{XY}$. Получаем $\bar{X} = (9+10+12+5)/4 = 9, \bar{Y} = 5, \bar{X}^2 = 350/4, \bar{XY} = 193/4$. Значит, $b = 1/2; a = 1/2$ (см. систему (17.2)). Итак, уравнение регрессии есть $y = 1/2 + x/2$. Изобразим указанные точки и линию регрессии в системе координат на плоскости (рис. 17.1):

Итак, в теоретическом плане линейная (приближенная) зависимость доходности d рассматриваемой бумаги от f выглядит так: $d \approx a + bf$, где $b = V_{fd}/V_{ff}, a = m_d - b \cdot m_f$. На практике же приходится использовать соответствующие выборочные оценки и тогда получим: $b = V_{fd}^e/V_{ff}^e, a = \bar{d} - b \cdot \bar{f}$, где $V_{fd}^e = \overline{df} - \bar{d} \cdot \bar{f}$ и $V_{ff}^e = \overline{f^2} - (\bar{f})^2$.

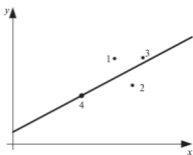


Рис. 17.1

(Напоминаем, что V_{ff}^e, V_{fd}^e обозначают выборочные аналоги вариации случайной величины f и ковариации d, f , в частности, через \bar{d} обозначено среднее выборочное значение доходности d и т.д. — см. пример 1.)

Отметим, как и выше (см. формулу (17.1)), что для математических ожиданий или выборочных средних значений

верно точное равенство, аналогичное (17.1) или (17.3).

Если гипотеза о влиянии ведущего фактора на данную ценную бумагу верна, то все отклонения от прямой $a + b \cdot f$ вверх и вниз являются действительно случайными и если в будущем возникнет новая ситуация, новая пара величин (f, e) , то соответствующая точка расположится в окрестности указанной прямой.

Если ведущий фактор f выбран удачно, то его влиянием определяются почти все случайные колебания доходности d , а остаточные колебания $e = d - (a + bf)$ оказываются сравнительно небольшими и некоррелированными и друг с другом и с другими доходностями d . Обозначим через v_{ii} вариацию остаточного колебания e_i и через v_{ij} — совместную ковариацию различных оста-

Узнайте стоимость

написания студенческой

точных величин e_i, e_j . Итак, окончательно получаем: $d_i = a_i + b_i \times f + e_i$ и $v_{ij} = 0$.

работы на заказ

<http://>

Если для каждой ценной бумаги аналогичная зависимость ее доходности d от ведущего фактора найдена, то можно легко найти и все нужные величины для формирования оптимального портфеля. Действительно, имеем для эффективности i -й бумаги точное равенство $m_i = a_i + b_i m_f$, где m_f — эффективность ведущего фактора, для вариации i -й ценной бумаги и совместных ковариаций имеем точные равенства:

$$V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + v_{ii}, \quad V_{ij} = b_i b_j V_{ff}. \quad (17.4)$$

17.3. Эффективность рынка как ведущий фактор

В роли ведущего фактора f наиболее удобно брать среднюю доходность рискованных бумаг самого финансового рынка. Это взвешенная (с учетом капитала) сумма доходностей всех рискованных ценных бумаг, обращающихся на рынке.

Пример 2. На рынке обращаются рискованные ценные бумаги, доли (среди рискованных бумаг) и эффективности которых (средние годовые доходности в процентах) таковы:

	1	2	3	4	5	6	7
Доли	20	10	10	10	5	5	40
Эффективности	8	10	12	14	16	18	6

Эффективность рынка (средняя годовая доходность рискованных бумаг) равна $(20 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 14 + 5 \cdot 16 + 5 \cdot 18 + 40 \cdot 6) / 100 = 9,3\%$.

Определенная таким образом эффективность рынка является абстракцией. Ведь на финансовом рынке обращается огромное число ценных бумаг, среди которых много кратковременных (за год образуются и погибают тысячи корпораций, выпускающих свои ценные бумаги), есть малорисковые, относительно которых не ясно, не признавать ли их безрисковыми. Выход состоит в отслеживании характеристик наиболее важных для рынка ценных бумаг с длительной историей. Обработка этих бумаг по специальным правилам позволяет получать разнообразные индексы (см. в § 17.4 описание таких индексов), каждый из которых может отображать эффективность рынка, как она определена выше. В дальнейшем эффективность рынка понимается как один из таких глобальных рыночных индексов.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Пример 5. В таблице указаны доходности ценной бумаги d и (средняя) доходности рынка f (по рисковым бумагам) на протяжении ряда кварталов. Найдите регрессию d на f .

d	10	12	9	11	12	10	8	10
f	15	16	14	15	17	16	13	15

Решение. Находим оценки для математического ожидания, дисперсии d, f и т.п. оценки и получим

$$\bar{d} = 10, \quad \bar{f} = 15, \quad \mathcal{V}_{ff} = \sum_{i=1}^{10} (f_i - 15)^2 / 10 = 1,2;$$

$$\mathcal{V}_{df} = \sum_{i=1}^{10} (d_i - 10)(f_i - 15) / 10 = 1,2.$$

Значит, $b = \mathcal{V}_{df} / \mathcal{V}_{ff} = (1,2) / (1,2) = 1$, $a = \bar{d} - b \cdot \bar{f} = 10 - 1 \cdot 15 = -5$.

Таким образом, уравнение линейной зависимости d от f есть: $d \approx f - 5$.

Итак, предполагаем, что доходности всех ценных бумаг зависят от доходности рынка f : $d_i = a_i + b_i f + e_i$, причем эффективности бумаги m_i и рынка m_f (средние ожидаемые доходности) связаны точным равенством $m_i = a_i + b_i m_f$. Вариация доходности i -й бумаги при этом равна $V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + v_{ii}$ — см. (17.4), где V_{ff} — вариация средней рыночной доходности (средней доходности на единицу стоимости ценных бумаг рынка).

Рассмотрим в этой ситуации портфель ценных бумаг. Оказывается, эффективность (рисковой части) портфеля с зафиксированными долями бумаг также линейно зависит от эффективности рынка. В самом деле, пусть доля i -й ценной бумаги есть x_i , тогда эффективность портфеля

$$m_p = \sum_i x_i (a_i + b_i m_f) = \sum_i x_i a_i + \left(\sum_i x_i b_i \right) \cdot m_f \quad (17.5)$$

или, обозначив $a_p = \sum_i a_i x_i$, $b_p = \sum_i x_i b_i$, получим $m_p = a_p + b_p m_f$.

Далее, дисперсия рассматриваемого портфеля $D_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ может быть разбита на две части: $D_p = \sum_i x_i^2 (b_i^2 V_{ff} + v_{ii}) + \sum_{i \neq j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \sum_i x_i^2 v_{ii} + \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = D_1 + D_2$.

Узнайте стоимость

написания студенческой

Поскольку первая часть $D_1 = \sum x_i^2 v_{ii}$ представляет взвешен-

работы на заказ

ную сумму собственных дисперсий доходностей бумаг, входящих в портфель, то эта часть может быть названа *собственной дисперсией портфеля*, а квадратный корень из нее, т.е.

$r_1 = \sqrt{\sum_i x_i^2 v_{ii}}$, может быть назван *собственным риском портфеля*.

Вторая часть $D_2 = \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \left(\sum_i x_i b_i \right)^2 V_{ff}$ должна быть названа *рыночной дисперсией*. Извлекая из нее квадратный корень, получаем *рыночный риск портфеля* $r_2 = r_f \left| \sum_i x_i b_i \right|$, где r_f — риск

всего рынка, т.е. квадратный корень из дисперсии доходности рынка (средней доходности на единицу стоимости ценных бумаг рынка).

Предположим, что капитал портфеля вложен равными долями во все ценные бумаги, тогда собственная дисперсия портфеля равна $\left(\sum_i v_{ii} \right) / n$ и убывает к нулю при $n \rightarrow \infty$, если собствен-

ные риски бумаг $\sqrt{v_{ii}}$ ограничены сверху (так как слагаемых всего n), так же ведет себя и собственный риск портфеля. Таким образом, еще раз подтверждается вывод Марковица об уменьшении собственного риска портфеля при увеличении числа бумаг, входящих в него. Наоборот, рыночный риск портфеля при $n \rightarrow \infty$ стремится к $r_f \left| \sum_i b_i \right| / n$, и если коэффициенты b_i ограни-

чены снизу, то этот риск к нулю вовсе не стремится (так как число слагаемых n).

Задачу Марковица (см. (16.2)) о формировании портфеля заданной эффективности m_p и минимального риска теперь можно сформулировать так:

$$\begin{aligned} \left(r_f \sum_i x_i b_i \right)^2 + \sum_i x_i^2 v_{ii} &\rightarrow \min, \\ \sum_i x_i (a_i + b_i m_f) &= m_p, \\ \sum_i x_i &= 1 \end{aligned} \quad (17.6)$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

и в зависимости, разрешена или нет операция «short sale» с добавлением требования об отсутствии неопределенности переменных.

Как видим, получилась «почти» задача линейного программирования. Отличие — в нелинейной добавке в целевой функции.

<http://>

17.4. Эффективность рынка, эффективность ценной бумаги и ее «бета»

Итак, предполагаем, что доходность любой ценной бумаги зависит от доходности рынка f : $d_i = a_i + b_i f + e_i$ (повторим еще раз, что под доходностью рынка понимается средняя доходность рискованных бумаг). Обычно вместо буквы b_i используют букву β_i . Этот коэффициент так и называют: «бета ценных бумаг вида i относительно рынка» или, короче, «бета i -го вклада». Эта величина определяет влияние рынка на данные ценные бумаги: если $\beta_i > 0$, то доходность бумаг i -го вида колеблется в такт с рынком, а если $\beta_i < 0$, то поведение бумаги прямо противоположно колебаниям доходности рынка в целом.

Как отмечено выше, вариация доходности V_{ii} каждой ценной бумаги равна $\beta_i^2 V_{ff} + v_{ii}$, т.е. состоит из двух слагаемых: «собственной» вариации v_{ii} , не зависящей от рынка, и «рыночной» части вариации $\beta_i^2 V_{ff}$, определяемой случайным поведением рынка в целом. Их отношение $\beta_i^2 V_{ff} / v_{ii}$ обозначается R_i^2 и называется R -squared. Это отношение характеризует долю риска данных ценных бумаг, вносимую рынком. Те бумаги, для которых R -squared велико, в каком-то смысле предпочтительнее, так как их поведение более предсказуемо.

Продолжим рассмотрение примера 1. Регрессия d на f найдена: $d \approx f - 5$. Следовательно, случайная величина остаточных колебаний e есть $d - (f - 5)$. Проще всего найти вариацию этого остатка, составив ряд значений e :

$$\begin{array}{|cccccccccc|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Среднее, естественно, равно 0, и потому $\bar{\epsilon} = 2/10$. Далее, $\beta = b = 1$, $R^2 = 1 \cdot \overline{V_{ff}} / \bar{\epsilon} = (1,2)/(0,2) = 6$.

(Напоминаем, что $\overline{V_{ff}}$, $\bar{\epsilon}$, и обозначают выборочные аналоги вариаций случайных величин f , e , в частности,

$$\overline{V_{ff}} = \sum_{i=1}^{10} (f_i - 15)^2 / 10 = 1,2).$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Эффективность ценных бумаг удобно отсчитывать от эффективности безрисковой вклада m_0 . Иллюстрация $m_i = a_i + \beta_i m_f = m_0 + \beta_i(m_f - m_0) + \alpha_i$, где $\alpha_i = a_i + (\beta_i - 1)m_0$. Превышение эффективности ценной бумаги над безрисковой эффективностью m_0 называется *премией за риск*. Таким образом, эта премия за риск в основном линейно зависит от премии за риск, складывающейся для рынка в целом, и коэффициентом является «бета» данной бумаги. Это, однако, верно, если $\alpha = 0$. Такие ценные бумаги называются «справедливо оцененными». Те же бумаги, у которых $\alpha > 0$, рынком недооценены, а если $\alpha < 0$, то рынком переоценены.

В частности, в рассматриваемом примере α ценной бумаги равна $\alpha + 4(b - 1) = -5$, следовательно, эта бумага переоценена рынком (эффективность безрисковых вложений принята равной 4).

Заметим, что в силу формулы (17.5) можно утверждать, что не только бумаги имеют «беты», но также и портфели, и «бета» портфеля равна взвешенной сумме «бета» бумаг, входящих в портфель. Подобным образом α_P портфеля равна $a_P + (\beta_P - 1)m_0$, т.е. выражается аналогично «бета» портфеля. Как и для бумаг, портфель называется «справедливо оцененным», недооцененным, переоцененным, если соответственно $\alpha_P = 0$, $\alpha_P > 0$, $\alpha_P < 0$ (рис. 17.2).

Прямая на рисунке называется *линией ценных бумаг* (Security Market Line — SML). По горизонтальной оси отложены коэффициенты β , по вертикальной —

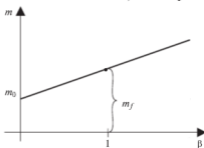


Рис. 16.2

эффективности бумаг и портфелей. Но эта прямая SML отражает идеальную зависимость между β и эффективностью бумаг и портфелей (такая зависимость постулируется как реальная в модели CAPM — см. § 18.3). Все точки, лежащие на прямой SML, соответствуют «справедливо оцененным» бумагам (портфелям), а те, кото-

рые лежат выше/ниже этой линии, — недооцененным/переоцененным.

В частности, одна из задач финансового аналитика состоит в нахождении недооцененных рынком бумаг и в рекомендации инвестору приобретать их.

Узнайте стоимость

написания студенческой

17.5. Другие ведущие факторы рынка

работы на заказ

<http://www.kupim.ru>

Таких факторов довольно много. К наиболее известным из них относятся средние и индексы Доу Джонса (Dow Jones). Промышленный индекс Доу Джонса (Dow Jones Industrial Average) составляется по ценным бумагам 30 крупнейших индустриальных компаний. Он рассчитывается путем сложения цен включенных в него акций на момент закрытия биржи и деления полученной суммы на определенный коэффициент. В дальнейшем изложении подразумевается именно этот индекс Доу Джонса.

Аналогично построены и другие индексы.

Помимо показателей Доу Джонса, широко распространены: Standard&Poor's 500 index — индекс крупнейших 400 индустриальных + 20 транспортных + 40 коммунальных + 40 финансовых компаний.

The NYSE Composite index — составной индекс Нью-Йоркской биржи — по всем ценным бумагам, которые на ней котируются.

Значение индекса DJIA за 15 апреля 1999 г. было равно 10 462.

Что касается российских индексов, то до краха пирамиды ГКО

17 августа 1998 г. использовались несколько индексов, устроенных подобно указанным выше. Сейчас (весной 2003 г.), пожалуй, какого-то лидирующего нет; можно отметить индекс РТС (Российской Торговой Системы) и фондовый индекс «Коммерсанта» — широко известной газеты. На рис.17.3 приведена диаграмма значений индекса «Коммерсанта» за первую половину апреля 1999 г.

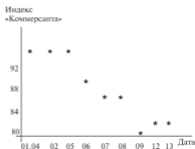


Рис. 16.3

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. По каким причинам может меняться безрисковая ставка?
2. Как подсчитать β данной ценной бумаги?
3. Почему бумаги с отрицательной β воспринимаются как необычные, экстравагантные?
4. Почему бумаги с отрицательной β хороши для диверсификации портфеля?

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

5. Портфель состоит наполовину по стоимости из ценной бумаги с $\beta = 1,2$ и из другой бумаги с $\beta = 0,9$. Найдите β портфеля.
6. Пусть у двух бумаг β равны соответственно 1,2 и $-0,8$. Постройте портфель с $\beta = 0$ из этих двух бумаг.
7. Если β портфеля равна 0, означает ли это, что портфель безрисковый?

8. Даны значения доходности ценной бумаги (нижняя строка) и рынка (верхняя строка) на протяжении десяти кварталов:

10	9	9	10	10	11	11	12	10	8
23	21	20	22	23	24	25	27	25	20

С помощью компьютера подсчитаны характеристики ценной бумаги: $a = 4,67$; $b = 1,83$; $\alpha = 8,00$; собственная вариация — 0,77; рыночная — 4,03; R -squared = 5,26. Эффективность безрисковых вложений равна 4. Проверьте компьютерные расчеты.

Узнайте стоимость написания студенческой Глава 18 работы на заказ

ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК И ЕГО МОДЕЛИ

18.1. Соглашения о финансовом рынке

На финансовом рынке его участники проводят финансовые операции с помощью финансовых инструментов.

Результат большинства операций невозможно предсказать. Невозможно в общем предсказать и другие какие-либо характеристики операций, например доход и доходность. Но практическая работа настойчиво требует этого. Выход заключается в принятии определенных соглашений о рынке, позволяющих привлекать для анализа хотя бы какие-то научные доводы. В основном настаивают на трех предположениях:

1. «Скрытые» параметры типа психологических мотивов не учитываются. Любой участник рынка стремится действовать так, чтобы обеспечить себе наибольший доход, а не действовать «назло» своему конкуренту и тем самым непредсказуемо с объективной точки зрения. Данное предположение служит принципиальным основанием для применения научных методов анализа рынка.

2. Хотя с чисто абстрактной точки зрения состояний рынка бесконечно много и они полностью, со всеми деталями, не повторяются, все же довольно часто для данного сегодняшнего анализируемого состояния может найтись близкое аналогичное состояние в прошлом или в другом месте. Это позволяет надеяться, что и дальнейшее развитие сегодняшнего состояния пойдет примерно так же, как и найденного аналогичного (с учетом изменений, происшедших на рынке). Такой способ анализа называется *поиском аналогов*. Это предположение о рынке можно развить далее, допустив, что различные показатели рынка можно моделировать как случайные величины. Данное предположение открывает путь к использованию теоретико-вероятностных методов. Нужно совершенно четко сказать, что в полной мере это предположение не выполняется. Однако нужно признать, что так всегда обстоит дело с применением теоретико-вероятностных, статистических закономерностей на практике.

3. Об анализируемом финансовом инструменте (или о близких в некотором смысле к нему) должна быть накоплена опреде-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

ленная информация. В настоящее время это не так сложно, как можно подумать. В бумажных рассылках по всему миру, накоплены огромные массивы разнообразной информации и толково составленный запрос может принести много нужной информации (например, о курсе доллара и других валют на мировых валютных рынках в данный момент или о поведении курсов этих валют за последние годы). Этой информации вполне может быть достаточно для статистической обработки, чтобы получить оценки интересующих нас показателей с нужной точностью.

Три сформулированных предположения служат основой для исследования финансовых рынков научными методами (математическими, с помощью компьютерной техники и т.д.), построения моделей таких рынков, все более полно описывающих и отражающих реальные финансовые рынки. Этим моделям и посвящена данная глава.

18.2. Эффективный рынок

Хотя гипотеза поведения цен как случайного блуждания далеко не сразу была принята экономистами и финансистами (финансовыми аналитиками), по всей видимости она привела к (теперь уже) классической концепции эффективного рынка. Эффективность означает, что рынок ведет себя «рационально». Под этим подразумевается, что на рынке:

1) мгновенно производится коррекция цен на изменение внешних условий, цены становятся опять «справедливыми», не оставляя участникам рынка чисто спекулятивных возможностей получения прибыли только за счет разницы в ценах;

2) участники рынка однородно оценивают поступающую информацию, мгновенно корректируя свои решения;

3) участники рынка преследуют свои собственные (эгоистические) цели, которые характеризуются некоторым объективным образом; данное предположение позволяет анализировать действия конкретного участника, опираясь на некоторые объективные его устремления.

Эти предположения выражены чисто словами. Тем более удивительно, что они вместе с гипотезой о случайном блуждании цен позволяют развить стройную и довольно сложную математическую теорию эффективного рынка.

Один из выводов этой теории — об отсутствии на эффективном рынке арбитражных возможностей. Арбитраж — это купля-продажа активов, позволяющая извлечь прибыль из разницы цен

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://>

на разных рынках. На эффективном рынке такое невозможно, ибо арбитражеры будут сбить действенными действиями разницу цен на активы со схожими характеристиками. В частности, ценная бумага, «доминируемая» по своим характеристикам какой-нибудь другой, не может долго функционировать на таком рынке и должна исчезнуть.

Ключевое положение о поведении цен на таком рынке — что они «случайно» блуждают — приводит к тому, что наилучший прогноз цены на завтра есть сегодняшняя цена.

Еще один вывод этой теории — каждый участник рынка обязан диверсифицировать свой портфель и тем самым свести к нулю несистематический риск. Следовательно, только систематический риск портфеля будет оценен рынком и потому доходность портфеля должна зависеть только от такого риска. Этот вывод был сделан уже после появления упоминавшейся выше теории Марковица о строении оптимального портфеля.

Математическая теория эффективного портфеля базируются на довольно сложной теории случайных процессов и здесь не излагается.

Весьма примечательно, что теория эффективного рынка послужила толчком к образованию некоторых конкретных и ранее неизвестных финансовых инструментов вроде «фондов взаимных вложений». Специфика таких фондов состоит в том, что они инвестируют средства своих клиентов в акции компаний, которые давно котируются на рынке и утвердили себя в качестве весьма надежных, но не самых доходных. Дело в том, что рядовые инвесторы не могут быстро реагировать на изменения на рынке, как того требует теория эффективного рынка, и потому вкладывают свои средства (через фонды взаимных вложений) в ценные бумаги тех компаний, которые могут себе позволить не откликаться на всевозможные кратковременные колебания рынка.

18.3. Модель CAPM (Capital Asset Pricing Model — модель ценообразования капитальных активов)

Эта теория базируется на концепции равновесного рынка и является дальнейшим развитием понятия эффективного рынка в некоторых направлениях. Вспомним, что инвестор, озабоченный формированием своего портфеля ценных бумаг, ищет такие бумаги на рынке. То же делают другие. Если их совокупный спрос превышает предложение соответствующих бумаг, имеющихся на рынке, то цена таких бумаг повышается, а других — падает. В конце

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

концов рынок может прийти в равновесие, когда спрос по любой ценной бумаге в количестве, равном ее количеству на рынке. В концепции равновесного рынка считается также, что отсутствуют операционные издержки (по оформлению сделок) и что все участники рынка имеют равные возможности оценивания информации, которая всем одинаково доступна. Предполагается также, что на рынке имеются безрисковые ценные бумаги.

Основной постулат этой модели состоит в том, что средний ожидаемый доход по активу выражается в виде линейной функции от безрисковой ставки дохода m_0 , ожидаемого дохода по рыночному портфелю (это взвешенная доходность по всем бумагам, обращающимся на рынке) m_f и уровня систематического риска, присущего активу и выражаемого через риск всего рынка и коэффициент β данного актива. В этом нет ничего удивительного: предполагается, что участники рынка достаточно грамотны и знают про эффект диверсификации, а поэтому должны эту диверсификацию обязательно осуществлять. Поэтому в портфеле оценивается только систематический риск, т.е. рыночный. Итак, ожидаемый доход по активу i определяется как $m_i = m_0 + \beta_i (m_f - m_0)$. В § 17.4 указанная формула имеет добавок — член, называемый «альфа» данной ценной бумаги. Значит, в модели CAPM для любой бумаги $\alpha = 0$, т.е. все точки, изображающие ценные бумаги и портфели, лежат на линии SML — см. рис. 17.2. В § 17.4 было показано, что не только у ценных бумаг есть α , но и у портфеля, и β портфеля равна взвешенной сумме β всех бумаг, входящих в портфель.

В модели CAPM решается задача дисконтирования рискованных активов к текущему моменту. Выше уже отмечено, что будущие доходы рискованных активов надо дисконтировать по более высокой ставке, чем безрисковая.

Рассмотрим операцию с ценной бумагой: покупку ее в начале периода по цене P и продажу в конце по цене P' . Если есть текущие доходы в этом периоде, например, дивиденды, если эта ценная бумага — акция, то обозначим их D' . В детерминированном финансовом анализе за возможную оценку курсовой стоимости в начале периода, т.е. за цену P принимается величина

$$P = (D' + P') / (1 + i),$$

где i — процентная ставка.

В детерминированном финансовом анализе роль этой процентной ставки играет эффективность безрискового вложения — безрисковая процентная ставка m_0 . Вместе с тем для инвестора более точной сегодняшней оценкой будущей стоимости является

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

величина будущего ожидаемого дохода, дисконтированная по ставке доходности капитала, он прогнозируется в качестве эффективности вклада. В модели CAPM эта ставка m_i определяется эффективностью i -го вложения [http://](http://www.1000000.ru)

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0).$$

Дисконтируя по этой ставке, получим оценку текущей стоимости:

$$P = (M[P'] + M[D']) / [1 + m_i + \beta_i(m_f - m_0)].$$

В числителе этой формулы стоит сумма ожидаемых от акции доходов: от будущей продажи и дивидендов, а в знаменателе — единица плюс ставка доходности на рынке.

При положительной коррелированности с рынком чем больше вносимый рынком риск, тем больше ставка доходности, тем меньше современная оценка будущих доходов от акции. Напротив, при отрицательной коррелированности актива с рынком чем больше рыночный риск, тем больше сегодняшняя оценка будущих доходов от актива.

18.4. Модель APT (Arbitrage Pricing Theory — арбитражная модель ценообразования)

В модели CAPM эффективность актива зависит от эффективности большого рынка и коэффициента актива, отражающего риск этого актива и взаимосвязь актива и рынка. Таким образом, в этой модели эффективность актива зависит от одного фактора — эффективности «большого» рынка.

Модель APT — это обобщение модели CAPM, в ней доходность актива (как случайной величины) зависит от нескольких факторов — случайных величин f_1, \dots, f_n , которые попарно некоррелированы и у которых математическое ожидание и дисперсия равны 0. Кроме этих факторов, есть еще дополнительный «шумовой» член (как и в теории CAPM), не некоррелированный ни с факторами f_1, \dots, f_n , ни с «шумовыми» членами других активов.

Однако модель APT проигрывает модели CAPM в простоте и наглядности и поэтому модель CAPM продолжает оставаться одной из самых распространенных при расчетах ценных бумаг.

18.5. Идеальный финансовый рынок

Под таким рынком понимают рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшие, оптимальные решения. Следовательно, такой рынок

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

должен быть эффективным. Далее каждый участник рынка стремится сформировать оптимальный портфель своих ценных бумаг. Но согласно теории Тобина структура рисковей части оптимального портфеля одна и та же и не зависит от склонности инвестора к риску (в предположении существования безрисковых бумаг). Поэтому все захотят сформировать портфель, одинаковый по своей рисковей части. Однако структура продаваемых ценных бумаг может не быть таковой. Тогда пойдут обычные перераспределительные процессы: ценные бумаги, спрос на которые больше их предложения, начнут повышаться в цене, а те, спрос на которые меньше, — понижаться. В конце концов установится равновесие, при котором оптимальный портфель в своей рисковей части будет такой же, как и весь рынок в рисковей части. Следовательно, и для рынка в целом будет справедливо соотношение: $m_f = m_0 + \beta_f(m_f - m_0)$, где m_f — средняя эффективность всего рынка в целом, т.е. коэффициент β_f всего рынка равен 1. Итак, премия за риск, связанный с данной ценной бумагой, пропорциональна премии за риск рынка в целом и коэффициентом пропорциональности является «бета» данной ценной бумаги. Видим, что на идеальном рынке выполняется основной постулат модели CAPM.

Итак, оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке имеет ту же структуру рисковей бумаг, что и весь рынок. Таким образом, при формировании портфеля надо довериться рынку и сформировать структуру рисковей части портфеля аналогично рыночной структуре в его рисковей части. Если, скажем, в общей стоимости всех рисковей бумаг на рынке акции компании IBM составляют 1,5%, то и инвестор должен вложить 1,5% своего капитала, предназначенного для рисковей ценных бумаг, в акции IBM.

Но как разделить капитал на рисковей и безрисковей части, теория не может подсказать, это деление зависит от склонности инвестора к риску. Желая увеличить эффективность своего портфеля, инвестор должен будет уменьшать долю безрисковей бумаг и увеличивать доли рисковей бумаг, сохраняя оптимальные пропорции между ними.

18.6. Инвесторы на идеальном финансовом рынке

Обозначим γ_k — долю безрисковей актива в портфеле k -го инвестора. Как выше отмечалось, эта доля определяется склонностью к риску (или его неприятием) данного инвестора. Следовательно, $(1 - \gamma_k)$ — доля рисковей актива в портфеле k -го инвестора.

Узнайте стоимость

написания студенческой

Если $\gamma_k = 1$, то инвестор составил портфель только из безрисковых бумаг, если $\gamma_k < 1$, то инвестор вложил деньги под безрисковый процент и купил на эти деньги рискованных активов, так что $(1 - \gamma_k) > 1$.

работы на заказ

<http://>

Обозначим W_k — суммарный капитал инвестора, а $Y_k = (1 - \gamma_k)W_k$ — капитал, вложенный в рисковую часть портфеля. Пусть соотношение $S_1 : S_2 : \dots : S_n$, $\sum_i S_i = 1$, задает пропорции между стоимостями различных рискованных бумаг на рынке или в рискованной части оптимального портфеля. По предположению, рискованные части всех оптимальных портфелей инвесторов устроены одинаково. Итак,

$$S_i = V_i/V, \quad (18.1)$$

где V — суммарная стоимость всех рискованных рыночных активов на рынке; V_i — стоимость рискованных активов i -й фирмы (отождествляем акции с выпустившими их фирмами).

Так как рынок разделен между инвесторами, то $\sum_k Y_k = \sum_i V_i = V$. Одним из важных свойств идеального финансового рынка является то, что каждый инвестор k владеет одинаковой, присущей ему долей Z_k каждой фирмы. Действительно, из формулы (18.1) вытекает, что $S_i/V_i = 1/V$. Отсюда доля стоимости i -й фирмы, принадлежащей инвестору k , равна

$$Z_i^k = (S_i Y_k)/V_i = Y_k/V = Y_k / (\sum_j Y_j),$$

не зависит от фирмы и одинакова для всех фирм. Эта доля равна доле его участия на рынке рискованных активов.

Замечание. Описанные модели финансовых рынков частично перекрывают друг друга, так что каких-то очень четких границ каждой модели не существует. Можно лишь выделить некоторые ключевые положения этих моделей:

- *эффективный рынок*: рациональность действий участников, цены случайно блуждают; в портфеле инвестора нет «доминируемых» ценных бумаг;

- *модель CAPM*: оценивается только систематический риск, доходность актива линейно зависит от его систематического риска и средней рыночной доходности; «бета» портфеля равна линейной комбинации от «бета» активов с их долями;

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

<http://>

- *модель АРТ*. доходность актива зависит от нескольких факторов;

- *идеальный рынок*. портфель каждого инвестора оптимален и совпадает с рыночным портфелем в своей рискованной части, каждый инвестор владеет одной и той же присущей ему долей любой фирмы.

Какой-либо самой лучшей, общепризнанной модели финансового рынка не существует.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В § 18.2, где говорится об эффективном рынке, упомянуто, что «ценная бумага, доминируемая по своим характеристикам какой-нибудь другой, не может долго функционировать на таком рынке и должна исчезнуть». Как надо понимать это утверждение?

2. За день индекс Доу Джонса упал на 7%. Какую часть своей суммарной стоимости потеряли акции, «бета», которых 1,2?

3. Безрисковая ставка увеличилась, другие параметры, например «бета» данной бумаги, не изменились. Поднялись или опустились эффективности ценных бумаг (в модели CAPM)?

4. В модели CAPM известны эффективности и «бета» двух ценных бумаг. Как найти безрисковую ставку и эффективность рынка?

5. В модели CAPM известны безрисковая ставка, эффективность и «бета» некоторой ценной бумаги. Нарисуйте линию *SML*.

6. В модели CAPM сформировать портфель максимальной эффективности, «бета» которого не более 1,1, из бумаг со следующими «бета»: 1; 1,2; 0,8. Безрисковая ставка равна 4, эффективность рынка равна 8. Операция «short sale» не разрешена.

Решение. В указанной модели превышение эффективности портфеля над безрисковой ставкой пропорционально β портфеля. Поэтому надо составить портфель с максимально возможной β , т.е. с $\beta = 1,1$.

Для этого достаточно взять любые две бумаги, β которых лежат по разные стороны от 1,1; например, вторые бумаги с $\beta = 1,2$ и третьи — с $\beta = 0,8$, и решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1,2x_2 + 0,8x_3 &= 1,1, \\ x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Получим $x_2 = 3/4$, $x_3 = 1/4$. Таким образом, искомый портфель можно составить только из вторых и третьих бумаг.

7. На идеальном финансовом рынке 10% по стоимости составляют безрисковые бумаги, 90% — рискованные. Рисковых всего три: первые составляют $1/6$ и их $\beta = 0,8$; вторые — $1/3$ и $\beta = 1$. Найти долю и β третьих бумаг. Найти эффективности всех рискованных бумаг и среднюю доходность по всему рынку, если эффективность рынка (средняя доходность по рискованным бумагам) равна 8%, а безрисковая ставка равна 4%.

Решение. Разумеется, доля третьих бумаг равна $1/2$. Для нахождения β этих бумаг надо вспомнить, что для рыночного портфеля $\beta = 1$. Следовательно,

$$1/6 \cdot 0,8 + 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot \beta_3 = 1,$$

откуда $\beta_3 = 1,4$. Эффективность каждой ценной бумаги равна

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0) = 4 + \beta_i(8 - 4) = 4 + 4\beta_i,$$

т.е. $m_1 = 7,2\%$; $m_2 = 8$; $m_3 = 13,6$. Далее, средняя доходность по всему рынку равна $0,1 \cdot 4 + 0,9 \cdot 8 = 7,6\%$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Дополнение к части II

<http://>

В этом дополнении рассмотрена теория ожидаемой полезности и на ее основе сформулировано отношение ЛПР, инвестора к риску. Теория ожидаемой полезности изложена во многих книгах на русском языке. Некоторые же вопросы об отношении к риску, например коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска, на русском языке излагаются впервые.

Глава 19

ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Теория полезности существует в двух видах: теория предпочтений индивида и отражающая ее функции полезности — это детерминированный вариант, и теория ожидаемой полезности — стохастический вариант. Детерминированный вариант изложен в дополнении к ч. I (к созданию § 7.1 имели отношение экономисты). Стохастический вариант излагается ниже. Может показаться странным, но основы стохастической теории полезности были заложены Д. Бернулли в 1738 г. раньше, чем детерминированной.

19.1. Простейшие лотереи

Представьте, что вам предлагают купить лотерейный билет, по которому немедленно будет проведен розыгрыш. У вас равные шансы выиграть сумму $S = 100$ долл. И остаться при своих — ничего не выиграть и не проиграть. За какую сумму вы купили бы этот билет?

Если за 50 долл., то вы «объективист». Так называют тех, кто покупает билет за сумму M , равную математическому ожиданию выигрыша — в данном случае $M = 50$ долл. Вообще говоря, знание теории вероятностей способствует «объективности», т.е. среди знающих теорию вероятностей гораздо больше объективистов, чем в среднем по всему разумному человечеству.

Если вы согласны заплатить за билет лишь менее M , например только 45 долл., то вы не любите рисковать. Условно будем называть не любящих рисковать «пессимистами» (они не верят в выигрыш).

Если же вы согласны заплатить за билет более M , например 55 долл., то вы уверены, что вам повезет и вы выиграете 100 долл. В этом случае ваше отношение к риску положительное. Вас можно назвать «оптимистом» или «любящим риск» (risk lover).

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Можно узнать о вашем отношении к риску, рассуждая подобным образом о покупке и цене лотерейного билета.

Представьте, что описанный выше лотерейный билет у вас уже есть и вам предлагают его продать. За какую сумму вы бы его продали?

<http://>

Если за 50 долл., то вы «объективист». Если вы согласны продать билет за сумму менее M , например за 45 долл., то вы не любите рисковать и стараетесь избавиться от риска даже ценой некоторых потерь, эти потери есть ваша плата за избавление от риска.

Если же вы согласны продать билет лишь за сумму более M , например за 55 долл., то ваше отношение к риску положительное. Вы уверены, что Вам повезет и с возможностью выиграть вы растаетесь неохотно, лишь если вам за это приплатят.

Фиксируем теперь сумму 100 долл. и будем изменять вероятность выигрыша p . Рассматриваемый лотерейный билет при данном значении p дает выигрыш 100 долл. с вероятностью p . Теперь можно нарисовать графики покупной и продажной цены такого билета для объективиста, пессимиста и оптимиста (рис. 19.1).

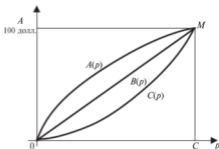


Рис. 19.1

объективиста, пессимиста и оптимиста (рис. 19.1).

Прямая линия — это график покупной и продажной цены $B(p)$ лотерейного билета для объективиста, верхняя кривая $A(p)$ — для оптимиста и нижняя $C(p)$ — для пессимиста.

Таким образом, лотерейный билет при $p = 0,5$ объективист купит или продаст ровно за математическое ожидание его выигрыша, т.е. за 50 долл., оптимист — за $A(0,5)$ (выше эта сумма была 55 долл.), пессимист — за $C(0,5)$ (выше эта сумма была 45 долл.).

Вообще-то говоря, покупная и продажная цены не обязательно должны совпадать для оптимиста и пессимиста, как изображено на рис. 19.1, но мы этим пренебрегли для упрощения.

Рассмотрим плоскую фигуру, образованную ломаной OCM и прямой объективиста или кривой оптимиста или пессимиста. Обозначим f долю, которую занимает эта фигура в прямоугольнике $OAMC$. Для объективиста эта фигура есть треугольник OCM и $f = 0,5$; для пессимиста эта фигура образована ломаной OCM и его кривой и $0 < f < 0,5$ и для оптимиста эта фигура образована ломаной OCM и его кривой и $0,5 < f < 1$. Число f оце-

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

нивает отношение ЛПР к риску. Если $\alpha = 0,5$, то это объективист и его отношение к риску нейтральное, при $\alpha < 0,5$ — это пессимист, он риск не любит, и чем меньше α , тем больше он не любит риск; наконец, если $0,5 < \alpha < 1$, это оптимист и чем ближе α к 1, тем более желательнее его отношение к риску.

Эти рассуждения выглядят безупречно. На самом деле огромное большинство людей не любят рисковать и потому, по нашей терминологии, они пессимисты. Кроме того, имея достаточно много денег и терпения, оптимиста можно разорить, после чего он, возможно, пересмотрит свое отношение к риску. Сделать это можно примерно так. Пусть он покупает у вас лотерейный билет за 55 долл. Вы присоединяете к этой сумме свои 45 долл. И разыгрываете билет с $p = 0,5$; 100 долл. попадают к нему или к вам. Потом эта операция повторяется. Таким образом, за каждый розыгрыш он проигрывает 5 долл. в среднем. Если таким образом сыграть n раз, то его средний выигрыш с большой вероятностью будет близок к 50 долл., в то время как затраты его будут в среднем на один розыгрыш равны 55 долл. Но, может быть, ему действительно повезет в нескольких первых партиях и в этом случае переубедить его будет очень трудно.

Как увидим далее (§ 20.3) весьма общие и принципиальные свойства системы предпочтений ЛПР вынуждают его относиться к риску неприязненно, не принимать его. Найдем мы и способ измерения этого неприятия. Так что оптимисты представляют собой лишь чистый курьез, во всех серьезных решениях риск предпочитают уменьшать.

19.2. Теория ожидаемой полезности

Выше рассмотрены лотереи с двумя исходами: выигрышем 100 долл. и статус-кво. Рассмотрим теперь более общие лотереи с n исходами 1, ..., n . Эти исходы неравноценны в системе предпочтений ЛПР.

Простой лотереей называется распределение вероятностей на множестве исходов $L = (p_1, \dots, p_n)$. Из простых лотерей можно конструировать более сложные. Возьмем k простых лотерей L_1, \dots, L_k . Припишем каждому $i = 1, \dots, k$ вероятность p_i и получим составную лотерею $(L_1, p_1; \dots; L_k, p_k)$. Эта лотерея осуществляется так: сначала разыгрывается распределение вероятностей (p_1, \dots, p_k) с помощью подходящего случайного механизма и получаем какой-то номер i из множества номеров 1, ..., k . Затем разыгрывается уже простая лотерея L_i . Такую лотерею называют со-

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

ставной лотереи 1-го порядка. Из таких лотерей можно сконструировать составные лотереи 2-го порядка и т.д.

Априори ясно, что разные лотереи имеют для ЛПР разную ценность, поэтому на множестве всех лотерей возникает отношение предпочтения: запись $L \preceq L'$ означает, что ЛПР предпочитает лотерею L' лотерее L . Отношение предпочтения описано в § 7.1. Главными свойствами предпочтения являются рефлексивность, транзитивность и совершенность. Рефлексивность означает, что $L \preceq L$ для любой лотереи, транзитивность означает, что если $L_1 \preceq L_2$ и $L_2 \preceq L_3$, то $L_1 \preceq L_3$, и совершенность означает, что для любых двух лотерей L, L' верно либо $L \preceq L'$, либо $L' \preceq L$.

Многие исследователи признают, что это отношение предпочтения весьма зыбкое: многие пары лотерей столь близки друг к другу, что ЛПР с большим трудом может выбрать из них лучшую. Трудность выбора лучшей лотереи усугубляет также их сложная природа — ведь можно построить составные лотереи сколь угодно высокого порядка. В процессе исследования данного круга вопросов были найдены три аксиомы, которые значительно упрощают систему предпочтений ЛПР на множестве лотерей:

Аксиома сводимости. Составная лотерея 1-го порядка $(L_1, p_1; \dots; L_k, p_k)$ эквивалентна (в системе предпочтений ЛПР) простой лотерее, в которой вероятность j -го исхода есть $\sum_i p_i p_{ij}$, где p_{ij} — вероятность j -го исхода в i -й простой лотерее L_i .

Пример 1. Пусть исходов всего два. Возьмем две простые лотереи $L_1 = (0,1; 0,9)$ и $L_2 = (0,4; 0,6)$. Теперь рассмотрим составную лотерею $(L_1, 0,3; L_2, 0,7)$. По аксиоме сводимости эта составная лотерея эквивалентна простой $(0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,4; 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,6) = (0,31; 0,69)$.

Итак, аксиома сводимости позволяет ограничиться только простыми лотереями, которые будем называть просто лотереями. Множество всех лотерей обозначим \mathcal{L} . Для случая n исходов это множество есть $\{(p_1, \dots, p_n): \text{все } p_i \geq 0 \text{ и } \sum_i p_i = 1\}$ и называется $(n - 1)$ -мерным симплексом.

Формулировки двух других аксиом — непрерывности и независимости опустим, отметим только, что они довольно естественны.

Если все три аксиомы принять, то можно доказать следующую теорему:

Теорема. Возможно каждому исходу $i = 1, \dots, n$ приписать число u_i такое, что для любых двух лотерей $L = (p_1, \dots, p_n)$,

Узнайте стоимость

написания студенческой

$L' = (p'_1, \dots, p'_n)$ будет верно $L \succeq L'$, если и только если $\sum_i p_i u_i \leq \sum_i p'_i u_i$.

работы на заказ

Число u_i , приписанное http://, называется его *полезностью*. Число же $u(L) = \sum_i p_i u_i$, которое приписывается лотерее L ,

называется *средней ожидаемой полезностью* этой лотереи. С точки зрения теории вероятностей это просто математическое ожидание лотереи.

Полезности же лотерей можно вычислить по формуле математического ожидания.

Пример 2. Продолжим рассмотрение примера 1. Припишем исходу 0 полезность 0, а исходу 1 — полезность 100. Найдем средние ожидаемые полезности всех трех упомянутых лотерей: двух простых $L_1 = (0,1; 0,9)$ и $L_2 = (0,4; 0,6)$ и одной составной $(L_1, 0,3; L_2, 0,7)$.

Итак, $u_0 = 0$, $u_1 = 100$. Значит, $u(L_1) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 100 = 90$; $u(L_2) = 0,4 \cdot 0 + 0,6 \cdot 100 = 60$; поскольку по аксиоме сводимости составная лотерея эквивалентна простой $(0,31; 0,69)$, то ее средняя ожидаемая полезность равна $0,31 \cdot 0 + 0,69 \cdot 100 = 69$.

Пример 3. Пусть начальный капитал ЛПР составляет 4 долл., а его функция полезности денег есть $u(x) = \sqrt{x}$ (см. § 7.3). Ему предлагают лотерею, в которой возможны выигрыши 12 долл. с вероятностью 0,5 и «выигрыш» 0 долл. также с вероятностью 0,5. Следует ли ЛПР участвовать в такой лотерее?

Решение. Полезность 4 для ЛПР равна $u(4) = \sqrt{4} = 2$. Полезность его капитала после выигрыша 12 долл. равна $u(4 + 12) = 4$; после «выигрыша» 0 долл. — $u(4) = 2$; средняя ожидаемая полезность равна $0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 = 3$, что больше первоначальной. Следовательно, ему нужно участвовать в лотерее.

А сколько ему можно заплатить за право участия в этой лотерее? Обозначим эту плату a . Тогда a определяется из уравнения $0,5 \cdot (4 - a + 12) + 0,5 \cdot (4 - a) = 2$ и элементарные подсчеты показывают, что $a = 3,75$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Найдите вероятность, что за n розыгрышей лотереи оптимист потеряет не менее 50 долл. (см. § 19.1).

2. Пусть функция покупной (и продажной) цены лотерейного билета, по которому выигрыш 1 с вероятностью p и статус-кво с

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

дополнительной вероятностью есть p . Кто перед нами — оптимист, объективист или пессимист?

3. Рассмотрим лотереи с двумя исходами. Возьмем две простые лотереи $L_1 = (0,2; 0,8)$ и $L_2 = (0,3; 0,7)$. Опишите и изобразите на плоскости все лотереи, составленные из этих двух (см. пример **1**).

4. Сведите к простой составную лотерею $(L_1; 0,1; L_2; 0,1; L_3; 0,8)$, где $L_1 = (0,1; 0,2; 0,7)$ и $L_2 = (0,2; 0,6; 0,2)$, $L_3 = (0,3; 0,4; 0,3)$.

5. Рассмотрим лотереи с тремя исходами. Возьмем три простые лотереи $L_1 = (0,1; 0,2; 0,7)$ и $L_2 = (0,2; 0,6; 0,2)$, $L_3 = (0,3; 0,4; 0,3)$. Опишите и изобразите в пространстве все лотереи, составленные из этих трех — см. пример **1** и задачу **3**.

6. Проанализируйте пример **3** в общем случае — для произвольного уровня начального богатства ЛПР, для произвольной вероятности выигрыша и т.п.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Глава 20

ОТНОШЕНИЕ ЛПР:// ИНВЕСТОРА К РИСКУ

Известно, что разные люди относятся к риску по-разному: одни не любят рисковать, другие считают себя «счастливицами», которым непременно повезет. Оказывается, существуют способы выявить и даже количественно оценить отношение ЛПР к риску и тем самым лучше понять особенности принятия им решений.

20.1. Измерение неприятия риска

Выше рассмотрены лотереи с конечным множеством исходов. Сейчас рассмотрим более общую ситуацию. Множество исходов есть множество всех неотрицательных денежных сумм $R^+ = [0, \infty)$. Лотерея задается распределением вероятностей на R^+

с помощью функции распределения F , которую и отождествим с самой лотереей. В данной ситуации $F(x)$ — вероятность того, что при розыгрыше лотереи ЛПР получит доход меньше x . Из теории ожидаемой полезности (см. гл. 19) следует, что можно определить для ЛПР функцию полезности $u(x)$, определенную на R^+ , после чего полезность лотереи F рассчитывается по формуле

$$u(F) = \int_{R^+} u(x) dF(x),$$

а если рассматриваемое распределение непрерывно, т.е. имеет плотность распределения f , то

$$u(F) = \int_{R^+} u(x) f(x) dx.$$

Эту полезность лотереи также называют средней ожидаемой полезностью лотереи. Функция $u(x)$ — функция Бернулли, а $u(F)$, определенная на лотереях рассматриваемого вида, — функция Неймана—Моргенштерна. Фактически функция Бернулли — это функция полезности денег (§ 7.3).

Пример 1. Пусть функция Бернулли есть $u(x) = \sqrt{x}$, а выигрыши лотереи равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Тогда средняя ожидаемая полезность лотереи будет $\int_0^1 \sqrt{x} dx = 2/3$.

Напомним свойства функции полезности денег $u(x)$ — она непрерывная, возрастающая и вогнутая, а если предположить ее

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

дифференцируемость, то ее первая производная положительная, но должна убывать, что известно как убывание предельной полезности денег (а в самой общей форме — для любой функции полезности, как 1-й закон Паскаля). В дифференциальной форме убывание первой производной выражается отрицательностью 2-й производной.

Но отрицательность 2-й производной — это и есть характеристика вогнутости функции. На рис. 20.1 это иллюстрировано

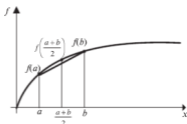


Рис. 20.1

выпуклостью части плоскости, расположенной вправо и вниз от графика функции. Напомним, что вогнутость функции f характеризуется тем, что $f(0,5a + 0,5b) \geq 0,5f(a) + 0,5f(b)$ для любых a, b из области определения f (см. рис. 20.1), что эквивалентно в свою очередь тому, что $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$

для любых a, b из области определения f (область определения f также должна быть выпуклой).

Поскольку интеграл $\int_{R^+} u(x) dF(x)$ есть аналог суммы $\sum_i p_i u(x_i)$, где $p_1 + \dots + p_n = 1$, то свойство вогнутости функции полезности u эквивалентно выполнению неравенства

$$U(F) = \int_{R^+} u(x) dF(x) \leq u\left(\int_{R^+} x dF(x)\right) \quad (20.1)$$

для любой лотереи F .

Какой содержательный смысл этого неравенства?

Как известно, $U(F) = \int_R u(x) dF(x)$ — это средняя ожидаемая

полезность лотереи F . С другой стороны, $\int_R x dF(x)$ — это средний

ожидаемый размер денежной суммы, которую ЛПР может выиграть в лотерее F . Следовательно, для ЛПР ценность усредненной денежной суммы больше усредненной полезности этих денежных сумм (см. рис. 20.1). Тем самым ЛПР напоминает «пессимиста» из § 19.1, который больше ценил 50 долл. — ожидаемое среднее лотереи, чем усредненную полезность исходов лотереи.

Узнайте стоимость

написания студенческой

Обозначим $c(F)$ тот размер денежной суммы, который для ЛПР равноценен величине $\int_{R^+} u(x) dF(x)$. Это значение выполняется

работы на заказ

равенство $u(c(F)) = \int_{R^+} u(x) dF(x)$ — это аналог покупной или продажной цены лотерейного билета. Как видно из неравенства

(20.1), $c(F)$ не больше $u\left(\int_{R^+} x dF(x)\right)$ — полезности среднего ожи-

даемого размера денежной суммы, которую ЛПР может выиграть в лотерее F . Величина $c(F)$ называется *безусловным эквивалентом лотереи F* (эквивалентом без всяких вероятностных соображений). Разность $\int_{R^+} x dF(x) - c(F)$ и показывает степень неприятия риска ЛПР.

Пример 2. Пусть $u(x) = \ln(x+1)$, а F задает равномерное распределение на отрезке $[9, 19]$. Такое распределение задается постоянной плотностью $f(x) = 0,1$ на отрезке $[9, 19]$. Вычислим $c(F)$. Имеем

$$\int_9^{19} u(x) dF(x) = \int_9^{19} 0,1 \cdot \ln(x+1) dx = 0,1(x+1) (\ln(x+1) - 1) \Big|_9^{19} = \ln 40 - 1.$$

Теперь надо найти c из уравнения $\ln(c+1) = \ln 40 - 1$. Окончательно получаем $c(F) = 40/e - 1 \approx 13,76$. Вычислим теперь $\int_{R^+} x dF(x)$. Для рассматриваемого равномерного распределения математическое ожи-

дание $\int_9^{19} x dF(x) = (9 + 19)/2 = 14$. Как и должно быть, $13,75 < 14$.

Следующая теорема, приводимая без доказательства, подводит итог изложенному в этом параграфе.

Теорема. Вогнутость функции полезности ЛПР u на множестве денежных сумм $[0, \infty)$ равносильна тому, что $c(F) \leq \int_{R^+} x dF(x)$ для любой лотереи F , и любое из этих двух равносильных условий свидетельствует о неприятии риска ЛПР.

20.2. Некоторые известные конкретные функции полезности денег

Известно несколько таких функций. Рассмотрим две наиболее типичные.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ.

Квадратичная функция полезности (рис. 20.2)

(20.2)

Эта функция известна еще как функция полезности Неймана—Моргенштерна. Она широко используется в теории финансов, в частности, в теории ценных бумаг. Конечно, как функция полезности, она должна рассматриваться только на отрезке $[0, a/2b]$, где она вогнутая. Широкое ее использование объясняется теоремой Неймана—Моргенштерна о том, что при определенных естественных допущениях экономическое поведение направлено на максимизацию ожидаемого значения полезности функции U .

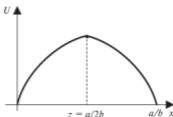


Рис. 20.2



Рис. 20.3

Логарифмическая функция полезности (рис. 20.3)

$$U(x) = \log_a x, \text{ где } a > 0. \quad (20.3)$$

Эта функция вогнута на всей своей области определения. Впервые она была рассмотрена Бернулли в 1738 г.

20.3. Коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска

Отношение ЛПР к риску очень важно для анализа принятия им различных решений и, как видно из теоремы, сформулированной в § 20.1, все дело в строении его функции полезности денег $u(x)$ — функции Бернулли. Поэтому эту функцию тщательно изучали и сделаны даже попытки измерить степень неприятия риска в конкретных точках области определения функции Бернулли.

Коэффициентом Эрроу—Пратта неприятия риска в точке x для ЛПР с функцией Бернулли u называется число $r_3(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Так как для функции полезности 1-я производная положительна, а 2-я — отрицательна, то $r_3(x) > 0$ во всякой точке x . Это

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

и есть обещанное в конце § 19.1 утверждение о неприятии риска ЛПР.

Пример 3. Найдем коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска для функции Бернулли $u(x) = e^{-ax}$, $a > 0$. Имеем $u'(x) = -ae^{-ax}$, $u''(x) = a^2e^{-ax}$, значит, $r_3(x) = a$.

Поясним происхождение коэффициента Эрроу—Пратта. Выше была сформулирована теорема о том, что степень неприятия риска определяется вогнутостью функции полезности. Математически степень вогнутости определяется величиной 2-й производной. Однако одной 2-й производной недостаточно: если функцию полезности увеличить, например, в 2 раза, то система предпочтений ЛПР не изменится, но 2-я производная тоже возрастет в 2 раза, хотя неприятие риска, очевидно, не изменилось. Для устранения этого вместо 2-й производной применяется отношение ее к 1-й производной.

Еще одно объяснение строения коэффициента Эрроу—Пратта. Фиксируем какую-нибудь вероятность p и предложим ЛПР сыграть в игру: с вероятностью p он получит сумму x и с вероятностью $1 - p$ — сумму y . Конечно, в некоторые такие игры ЛПР откажется играть (например, если обе величины x, y отрицательны). Обозначим множество игр (x, y) , в которые ЛПР соглашается играть при уровне его богатства w , через $A(w)$ и назовем это множество множеством игр, приемлемых для него. Если ЛПР не склонен к риску, то это множество выпукло. Граница этого множества состоит из «пограничных» игр (x, y) , таких, что $p \cdot u(w + x) + (1 - p) \cdot u(w + y) = u(w)$.

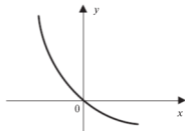


Рис. 20.4

Эта граница задает график функции $y(x)$ (рис. 20.4). Найдем производную этой функции в т. 0: $p \cdot u'(w) + (1 - p) \cdot u'(w) \cdot y'(0) = 0$.

Итак, $y'(0) = -p/(1 - p)$.

Можно использовать множество приемлемых игр $A(w)$ для оценки склонности ЛПР к риску. Пусть оценивается склонность к риску двух ЛПР — A и B . Найдем их множества приемлемых игр $A(w)$

и $B(w)$. Если $A(w) \subseteq B(w)$ при любом w , то можно сказать, что B более склонен к риску, чем A . Теперь оценим эти множества локально в некоторой окрестности 0. Ясно, что чем больше кривизна

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

кривой $y(x)$, тем меньше множество приемлемых игр, тем больше ЛПР не любит риск. Но кривизна кривой оценивается 2-й производной. Найдем 2-ю производную $y''(0)$:

$p \cdot u''(w) + (1-p) \cdot u''(w) \cdot (y'(0))^2 / u'(w) \cdot y''(0) = 0$. Используя найденное выше значение $y'(0)$, получим окончательно $y''(0) = (p/(1-p)^2) [-u''(w) / u'(w)]$.

Видно, что значение 2-й производной пропорционально коэффициенту Эрроу—Пратта.

20.4. Коллективные решения и разделение риска

Как сравнить ЛПР по их отношению к риску? Этот вопрос уже частично рассмотрен в предыдущих параграфах. Здесь рассмотрим разделение риска и ответственности между двумя ЛПР.

Рассмотрим частный случай процедуры исследования системы предпочтения ЛПР, описанной в предыдущем параграфе.

Предложим ЛПР сыграть в игру, в которой он с равными шансами получит сумму x или заплатит сумму y . Обозначим множество игр (x, y) , в которые ЛПР соглашается играть, через A . Граница этого множества состоит из «пограничных» игр и является графиком некоторой функции $g(x)$. Если ЛПР не склонен к риску, то множество A выпукло, функция g вогнута. Эти моменты

уже привычны и на них не останавливаемся (рис. 20.5). Итак, равновероятная лотерея (x, y) приемлема для ЛПР, только если $y \leq g(x)$.

Специально отметим, что функция $g(x)$ несомненно характеризует отношение ЛПР к риску — чем более вогнута эта функция, тем больше неприятие риска ЛПР.

Пусть теперь два ЛПР пытаются совместно разыграть лотерею (x, y) указанного вида. При этом они согласны внести совместно сумму y при проигрыше и разделить на двоих выигрыш x . Как найти множество лотерей, приемлемых для них? Может ли, в частности, найтись лотерея, приемлемая для обоих совместно, но неприемлемая для каждого в отдельности? На рис. 20.6 график функции g_1 для первого ЛПР показан сплошной линией, g_2 для второго — пунктирной.

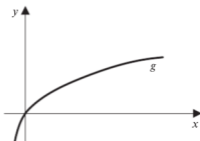


Рис. 20.5

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

Можно попробовать разделить выигрыш и проигрыш пропорционально. Скажем, первый берет долю $d = 3/4$, а долю $d = 1/4$ берет на себя второй. Тогда в лотерее (1000, 500) доля первого была бы (750, 375), а второго — (250, 125). Из рис. 20.6 видно, что такая лотерея приемлема для второго, а для первого неприемлема. И вообще видно, что пропорциональное разделение лотерей не подходит для первого — ведь все такие лотереи лежат на диагонали, а она не пересекается с множеством A приемлемых для первого ЛПР лотерей. С другой стороны, почему обязателен пропорциональный подход к разделению лотерей? Мало ли как могут договориться два ЛПР. Например, они могут разделить лотерею (1000, 500) так: первый — (500, 175), второй — (500, 325). Из рис. 20.6 видно, что это приемлемо для обоих ЛПР.

Пусть g_1, g_2 — функции, указанные выше для обоих ЛПР. Найдем функцию g для «коллектива» двух ЛПР.

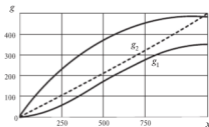


Рис. 20.6

Рассмотрим лотерею (a, b) . Она приемлема для коллектива, если и только если найдутся x_1, x_2, y_1, y_2 такие, что $x_1 + x_2 = a, y_1 + y_2 = b$ и $y_1 \leq g(x_1), y_2 \leq g_2(x)$. Отсюда ясно, что $g(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \{g_1(x) + g_2(a-x)\}$. Предположим теперь, что обе функции g_1, g_2 имеют необходимые производные, тогда максимальное значение функции $\{g_1(x) + g_2(a-x)\}$ достигается в точке c , для которой $g_1'(c) = g_2'(a-c)$. Если оба ЛПР риск не любят, то обе функции, как выше отмечено, вогнуты. Отсюда вытекает, что равенство производных функций $g_1'(x), g_2'(a-x)$ может быть только в одной точке. Итак, точка максимума, если она есть, единственна, обозначим ее $h(a)$. Имеем две функции g и h . Эти функции полностью описывают условия проведения лотерей в коллективе двух ЛПР. Опишем только «граничные» лотереи, т.е. лотереи (a, b) , для которых $b = g(a)$. Выигрыш делится так: первый получает $h(a)$, второй — остальную сумму $a - h(a)$; проигрыш распределяется следующим образом: первый вносит $g_1(h(a))$, второй — остальную сумму $g(a) - g_1(h(a))$.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Теперь можно несколькими способами сравнить отношение этих двух ЛПР к риску. Например, с помощью следующего утверждения.

Утверждение. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) второй не приемлет риск в большей степени, чем первый;
- б) $g_2(x) \leq g_1(x)$;
- в) $g_2'(x) \geq g_1'(x)$.

20.5. Учет отношения ЛПР к риску

Введем в рассмотрение функцию $U(r, m)$, с помощью которой ЛПР оценивает операцию с риском r и эффективностью m (напомним, что эффективность — это средняя ожидаемая доходность операции). Такая функция относится к классу функций полезности, так и будем ее называть. Любая линия уровня функции U дает операции, равноприемлемые для ЛПР, поэтому они называются еще *кривыми безразличия*. В зависимости от отношения ЛПР к риску такие функции могут быть трех видов (на рис. 20.7 изображены кривые безразличия).

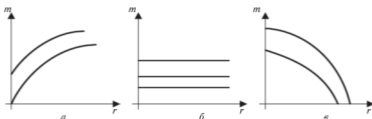


Рис. 20.7

Рис. 20.7, *а* соответствует неприятию риска — двигаясь по кривой безразличия, ЛПР компенсирует увеличение риска все большим увеличением дохода; рис. 20.7, *б* — нейтральному, или лучше сказать, безразличному отношению к риску; рис. 20.7, *в* — благожелательному отношению к риску, когда ЛПР считает, что ему непременно повезет и предпочитает более рискованные операции. Наиболее естественным представляется поведение ЛПР с неприятием риска. Типичная функция такого ЛПР есть, например, $U(r, m) = m - 2r$, т.е. когда ЛПР готов поступиться увеличением риска на единицу, если при этом эффективность увеличится на 2 единицы.

Продолжим теперь решение задач об оптимальном портфеле, изложенных в гл. 16, 17, с учетом отношения ЛПР к риску посред-

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

ством его функции полезности: среди всех портфелей найти портфель, наиболее полезный для данного ЛПР, т.е. максимизирующий его функцию полезности. Конечно, такой портфель надо искать среди портфелей, оптимальных по Парето, или эффективных. Обозначим множество таких портфелей P , тогда надо решить задачу:

$$\begin{aligned} U(P) &\rightarrow \max \\ P &\in P. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Естественной функцией полезности является такая, которая возрастает с увеличением эффективности портфеля и уменьшением его риска. Поэтому можно ограничиться лишь портфелями, оптимальными по Марковицу, т.е. имеющими минимальный риск при данной эффективности или максимальную эффективность при данном риске.

Если на рынке есть безрисковые бумаги, то задача (20.4) сильно упрощается. В самом деле, для оптимальных портфелей Тобина зависимость эффективности от риска линейная — $m_p = m_0 + d \cdot r_p$ (см. § 16.7). Подставляя эту линейную зависимость в функцию полезности, сведем задачу (20.4) к максимизации функции одной переменной.

Итак, при наличии безрисковых бумаг есть две возможности учесть отношение ЛПР к риску: выбором доли x_0 безрисковых бумаг и с помощью функции полезности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Пусть функция полезности ЛПР есть $u(x) = \ln(1+x)$, уровень его капитала w . Ему предлагают лотерею, в которой выигрыш x и проигрыш x имеют вероятность соответственно p и $1-p$. Найдите x , при котором такая лотерея ему безразлична. Каков ответ при $p = 0,5$?

2. Пусть функция Бернулли индивидуума есть $u(x)$, уровень его богатства w . Рассмотрим лотерею, которая с вероятностью p дает выигрыш C и с вероятностью $(1-p)$ — выигрыш B . Найдите продажную и покупную цену этой лотереи в общем виде. Решите эту задачу при конкретных данных: $u(x) = \sqrt{x}$, $w = 10$, $C = 10$, $B = 5$.

3. Пусть функция полезности индивидуума есть $u(x) = \sqrt{x}$. При уровне богатства 16 найти вероятностную премию за риск в лотерее, которая с вероятностью $1/2$ дает выигрыш 4 и проигрыш 4.

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

Решение. Эта вероятностная премия e за риск удовлетворяет уравнению $u(7) = (1/2 + e) \cdot u(x+4) + (1/2 - e) \cdot u(x-4)$, т.е. $16 = (1/2 + e) \cdot \sqrt{(16+4)} + (1/2 - e) \cdot \sqrt{(16-4)}$. Решая это уравнение находим $e = 0,04$.

<http://>

Следовательно, данному индивидууму при таком уровне его богатства безразлична лотерея, которая дает выигрыш 4 с вероятностью 0,54 и проигрыш 4 с вероятностью 0,46.

4. Пусть ЛПР приглашает сыграть в две лотереи:

$$X_1: \frac{0}{1/2} \mid \frac{4}{1/2} \quad m_1 = 2, \quad D_1 = 4; \quad X_2: \frac{1}{7/9} \mid \frac{9}{1/8} \quad m_2 = 2, \quad D_2 = 7.$$

Справа от табличек написаны средний ожидаемый выигрыш и дисперсия обеих лотерей. Если отвлечься от самого ЛПР, то определенно лотерея X_1 явно лучше — средний ожидаемый выигрыш тот же, а риск меньше. Однако если функция полезности ЛПР, например, есть $u(z) = \sqrt{z}$, то средняя ожидаемая полезность лотереи X_1 равна 1, т.е. $(1/2 \cdot u(0) + 1/2 \cdot u(4) = 0 + 1/2 \cdot 2 = 1)$, а лотереи X_2 равна 10/8. Это обстоятельство способно повлиять на выбор лотереи данным ЛПР.

На самом деле, и это всем прекрасно известно, окончательное решение, принимаемое ЛПР, зависит от его вкусов, симпатий, настроения и т.п.

5. Пусть функция полезности инвестора есть $f(P) = m - \sqrt{r}$. Заданы характеристики двух ценных бумаг: эффективности и их риски равны 4, 8; 6, 30; совместная вариация доходностей равна 20. С помощью компьютера перебрали с шагом $h = 0,2$ долю $x[1] = 1 - k \cdot h$ 1-й бумаги в портфеле и определили характеристики портфелей с такими долями бумаг ($x[2]$ при этом равно $1 - x[1]$). Таким образом, нулевой портфель состоит только из бумаг 1-го вида, а 5-й — из бумаг 2-го вида.

Эффективность	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0
Риск портфеля	8,0	9,1	13,3	18,3	24,2	30,0
Полезность портфеля	1,2	1,4	1,2	0,9	0,7	0,5
Номер портфеля	0	1	2	3	4	5

Проверьте компьютерные расчеты, убедитесь, что 1-й портфель имеет наибольшую полезность.

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

<http://>

6. Пусть оценка ЛПР полезности портфеля F есть $u(F) = m - r^2$, где m , r — эффективность и риск портфеля. Портфель составляется из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями и рисками соответственно (a_1, r_1) , (a_2, r_2) . Найдите самый полезный портфель. Найдите эффективность и риск этого портфеля.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ

К ВОПРОСАМ И ЗАДАЧАМ

Глава 1

1. 6. 2. 1653. 3. Пусть α — инфляция за год, тогда инфляция за квартал x находится из уравнения $(1+x)^4 = 1+\alpha$. 4. ..., 851, 926, 1000, 1080, 1166, 5. 11. 7. 4,76 (простые проценты). 4,1 (сложные). 10. 18,7. 11. $S(1 + \sum_{k=1}^n i_k)$. 12. $S \cdot \prod_{k=1}^n (1 + i_k)$. 13. Плательщику.

Глава 2

2. 721, 835. 3. 9. 4. 1636. 5. 20518. 6. 6002. 7. 3443. 9. 773. 10. 8. 11. 648. 12. При 10% — второй, при 5% — первый. 13. Увеличение на год. 14. 3000. 16. Да, например, для годовой ренты длительностью 1 год. 18. На первое место надо поставить максимальный платеж, затем — максимальный из оставшихся и т.д. 19. $R(1+i)^t/i$ минимальна при $t=0$; максимума нет. 20. При $i > 1,01$ (1,01 — это 101% годовых!) предпочтительнее увеличение платежа, при $i < 1,01$ — уменьшение ставки процента. 21. Да.

22.	1000	1050	2214	3535
		1000	1000	1000
	
		2050	3214	4535



Современную величину такой ренты A можно найти из уравнения $A(1,05) + (1,05A + 1000)1,05 + [(1,05A + 1000)1,05 + 1000]1,08 + \dots + \{[(1,05A + 1000)1,05 + 1000]1,08 + 1000\}1,1 = 4535$. 25. $\mu/\mu(-1)$. 26. Ответ автору неизвестен. 27. Да. 28. $1/\ln \mu$.

Глава 3

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

1. Для заемщиков. 7. Да. 8. В конце 1-го года — 1025, 2-го — 975, ..., в конце 8-го — 675, 9. 3480, 10. 7950, 11. 0,242, ..., 242.

Глава 4

<http://>

1. Не дана ставка процента, пусть она равна 6%. Рассмотрим подробно 1-й цикл: расходы в конце 1-го года, доходы в конце 2-го года, ..., в конце 10-го года. Современная величина этих платежей равна $(10\ 000 \cdot a(9,6) - 30\ 000)/1,06 = 35\ 858$. Современная величина всех платежей по проекту равна $35\ 858/(1 - 1,06^{10}) = 81\ 126$. Это и есть NPV проекта. 6. Брать большие суммы и «продать». 8. 349. 9. Арендовать. 10. $NPV = 777$, $q = 38\%$.

Глава 5

3. 14. 4. 17. 6. $K(t) = K(0) \cdot e^{at}$. 7. 411. 2,27. 8. Купить доллары и хранить их... 9. Нести рубли в банк.

Глава 6

1. Во всех трех случаях лучше уменьшение ставки процента. 2. 160; 5. 3. 74,7; 7,4. 5. 188,2. 6. 200; 6,7. 7. 10 295. 8. Доходность абсолютная 0,4316; в процентах годовых 319. 9. Доходность абсолютная 0,392; в процентах годовых 276.

Глава 7

3. Каждому по 0,5. 4. 29,23. 5. $u(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 + 5x_2}$.

Глава 8

4. Пусть один — разрезает торт, а второй — берет понравившийся ему кусок первым. 5. Пусть один из разбойников отбирает в отдельную кучку треть всей добычи, по его мнению; если из оставшихся разбойников никто эту кучку не берет, то ее должен взять тот, кто отбирал часть добычи в эту кучку, и т.д.

Глава 9

1. $i/2[(1+i)^{0,1} + (1+i)^{-0,1}] > i$. 4. $\int_{0,9}^{1,1} i(1+i)^t 5dt$. 5. Нет. 6. $i/((1+i)\ln(1+i))$.

7. Примем платеж пока равным 1, первый платеж может быть с равной вероятностью 1,10 и 1,12; математическое ожидание его современной величины равно $1/2((1+i)^{-9/12}) + 1/2((1+i)^{-11/12})$, обозначим его a_1 ; второй платеж с вероятностью 1/2 последует через 1 год после

Узнайте стоимость

написания студенческой работы на заказ

первого, с вероятностью $1/4$ через 1 месяц и с вероятностью $1/4$ через 14 месяцев, поэтому математическое ожидание его величины, дисконтированной к моменту первого платежа равно

$1/2((1+i)^{-1}) + 1/4((1+i)^{-1/12}) + 1/4((1+i)^{-14/12})$; обозначим его через a_2 ,

тогда математическое ожидание современной величины второго платежа есть $a_1 a_2$, аналогично, математическое ожидание современной величины третьего платежа есть $a_1 a_2^2$, и т.д., так что математическое ожидание современной величины рассматриваемой ренты равно $1000a_1 / (1 - a_2)$. **8.** Задача аналогична предыдущей:

$a_1 = i / ((1+i) \ln(1+i))$ (см. задачу б); $a_2 = \int_0^2 (1+i)^t \cdot f(t) dt$, где график

плотности f таков:



9.

Завтра:			Послезавтра:				
90,9	100	1110	89,6	90,9	100	110	121
1/3	1/3	1/3	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

10. Находим по таблице коэффициент приведения $a(10,7) = 6,71$; далее находим x из уравнения: $6,71 \cdot x = 5000$; $x = 745$. Значит, искомая часть проектов равна $(3000 - 745)/2500 = 90\%$. **11.** $(1+i) - i$:

$: ((1+i) \ln(1+i))$ (см. задачу б). **12.** Современная величина всех платежей равна $1/\ln(1+i)$ (см. пример 2). **14.** Средний доход хозяина с

каждого захода в казино равна сумме всех платежей, взятой с минусом, т.е. 5.

Глава 10

4. Третья операция — лучшая по обоим критериям. **8.** Может.

Глава 11

1. а) незнание; **б)** незнание; **в)** незнание; **г)** случайность; **д)** случайность; **е)** случайность; **ж)** при увеличении стажа уменьшаются и незнание, и случайные ошибки.

3.



$$4. r_f = \sqrt{f^2 \cdot r^2 + (1-f^2) \cdot r'^2},$$

$$f^* = r'^2 / (r^2 + r'^2);$$



Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ <http://>

6. $e = pA(1 - p)$, $p^* = 1/2$, $e^* = A/4$; $r = A(1 - p)\sqrt{p(1 - p)}$, $r^* = 3\sqrt{3}A/16$; при $p = 1/4$.

Глава 12

2. См. пример 2. 3. См. пример 2. 4. Мало что можно сделать в этой ситуации. Если у российского ученого есть в Мексике друзья, то они могут купить автомобиль как бы на его «будущие деньги», а потом отдать ему доллары по сегодняшнему курсу.

Глава 13

1. а) $1/2, 1/4, 1/2$; б) $0, 0$; в) $1/2, 0, 1/4$.

4.

$$C_1: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}; \quad C_2: \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix}; \quad C_3: \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

6. $16, 1; 1/32; 5/32; 15/32; 1 - (1/2)^n; 10, 5; 11. 9. 1/2 - \Phi((1 - 0,078n)/(0,557n))$, где Φ — функция Лапласа; при $n = 12$ эта вероятность равна $0,46$.

10. $M[S_n] = S_0(M[e^h])^n$, где h распределены как h . 11. Так как $\ln S = \ln S + h$, то $\ln(S)$ распределено нормально с математическим ожиданием $\ln S + nM[h]$ и дисперсией $nD[h]$, далее нужно воспользоваться формулами из п. 13.3. 12. При $n > 10S - SN(n, 2n)$, так что $P(S > S) = 1/2 - \Phi(n/2n)$.

Глава 14

1. $s = 4, 5$. 3. $M[K_n / K_0] = e^{na+nd/2}$; $D[K_n / K_0] = e^{2na+nd} \cdot (e^{nd} - 1)$.

Глава 15

1. Тот, у которого цена исполнения меньше. 2. Тот, у которого цена исполнения больше. 3. $2n$, где n — число периодов (см. § 13.1).

Глава 16

4. $7, 1\%$.

Глава 17

Узнайте стоимость

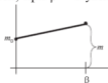
написания студенческой работы на заказ

<http://>

1. Безрисковая ставка в США — учетная ставка Федеральной Резервной системы. Такая ставка фактически определяет цену кредитных денег: чем она меньше, тем они дешевле обходятся заемщикам. Поэтому снижение такой ставки вызывает оживление деловой активности, повышение — уменьшение деловой активности, что предохраняет экономику от «перегрева». 2. Вообще-то α и β важнейших бумаг регулярно публикуются в специализированных печатных изданиях, самостоятельно считать эти параметры трудно. 3. Потому что их поведение противоположно поведению рынка в целом: на рынке котировки важнейших бумаг идут вверх, а котировки этих бумаг падают, и наоборот. 4. Такие бумаги используются для уменьшения риска бумаг, положительно коррелированных с рынком в целом. 5. 1,05. 6. (0,4; 0,6). 7. Нет.

Глава 18

2. 8,4%. 3. Зависит от β , при $\beta > 1$ уменьшается, при $\beta < 1$ увеличивается. 4. $m_0 = m_r - (m_2 - m_1)/(\beta_2 - \beta_1)$. 5.



Глава 19

1. $1/2 + \Phi((n-10)/10\sqrt{n})$, где Φ — функция Лапласа. 2. Пессимист, $f = 1/3$. 3. Отрезок L_1L_2 .



4. (0,27; 0,40; 0,33). 5. Треугольник, координаты вершин которого лотереи.

Глава 20

1. 0. 2. Покупная цена x определяется из уравнения: $pu(w-x+C) + (1-p)u(w-x+B) = u(w)$. 3. Продажная цена y определяется из уравнения: $pu(w+C) + (1-p)u(w+B) = u(w+y)$. 5. 155. 6. (0,95; 0,05); 3,9; 1,93.

Узнайте стоимость написания студенческой

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК работ на заказ

<http://>

1. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика. — М.: ЮНИТИ, 1998.
2. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. — М.: Приор, 1998.
3. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. — М.: Дело, 1998.
4. *Мелкумов Я.С.* Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. — М.: Инфра-М, 1996.
5. *Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: Инфра-М, 1994.
6. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу Л.* Количественные методы в финансах: Пер. с англ. — М. ЮНИТИ, 1998.
7. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: Дело, 1995.
8. *Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л.* Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1968.
9. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. — М.: Фазис, 1998.
10. *Мальхин В.И.* Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг. — М.: ГУУ, 2002.

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Приложения

Приложение 1

МУЛЬТИПЛИЦИКАТОР // МНОЖИТЕЛИ

Число периодов	Ставка процентов						
	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
1	1,015000	1,02000	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000
2	1,030225	1,040400	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025
3	1,045678	1,061208	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864	1,141166
4	1,061364	1,082432	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859	1,192519
5	1,077284	1,104081	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653	1,246182
6	1,093443	1,126162	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319	1,302260
7	1,109845	1,148668	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932	1,360862
8	1,126493	1,171659	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569	1,422101
9	1,143390	1,195093	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312	1,486095
10	1,160541	1,218994	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244	1,552969
11	1,177949	1,243374	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454	1,622854
12	1,195618	1,268242	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032	1,695881
13	1,213552	1,293607	1,378511	1,468534	1,563956	1,665074	1,772196
14	1,231756	1,319479	1,412974	1,512590	1,618695	1,731676	1,851945
15	1,250232	1,345868	1,448298	1,557967	1,675349	1,800944	1,935282
16	1,268986	1,372786	1,484506	1,604706	1,733986	1,872981	2,022370
17	1,288020	1,400241	1,521618	1,652848	1,794676	1,947900	2,113377
18	1,307341	1,428246	1,559669	1,702433	1,857489	2,025817	2,208479
19	1,326951	1,456811	1,598650	1,753506	1,922501	2,106849	2,307860
20	1,346855	1,485947	1,638616	1,806111	1,989789	2,191123	2,411714
21	1,367058	1,515666	1,679582	1,860295	2,059431	2,278768	2,520241
22	1,387564	1,545990	1,721571	1,916103	2,131512	2,369919	2,633652
23	1,408377	1,576899	1,764611	1,973587	2,206114	2,464716	2,752166
24	1,429503	1,608437	1,808726	2,032794	2,283328	2,563304	2,876014
25	1,450945	1,640606	1,853944	2,093778	2,363245	2,665836	3,005434
26	1,472710	1,673418	1,900293	2,156591	2,445959	2,772470	3,140679
27	1,494800	1,706886	1,947800	2,221289	2,531567	2,883369	3,282010
28	1,517222	1,741024	1,996495	2,287928	2,620172	2,998703	3,429700
29	1,539981	1,775845	2,046407	2,356566	2,711878	3,118651	3,584036
30	1,563080	1,811362	2,097568	2,427262	2,806794	3,243398	3,745318
31	1,586526	1,847589	2,150007	2,500080	2,905031	3,373133	3,913857
32	1,610324	1,884541	2,203757	2,575083	3,006708	3,508059	4,089981
33	1,634479	1,922231	2,258851	2,652335	3,111942	3,648381	4,274030
34	1,658996	1,960676	2,315322	2,731905	3,220860	3,794316	4,466362
35	1,683881	1,999890	2,373205	2,813862	3,333590	3,946089	4,667348
36	1,709140	2,039887	2,432535	2,898278	3,450266	4,103933	4,877378
37	1,734777	2,080685	2,493349	2,985227	3,571025	4,268090	5,096860
38	1,760798	2,122299	2,555682	3,074783	3,696011	4,438813	5,326219
39	1,787210	2,164745	2,619574	3,167027	3,825372	4,616366	5,565899
40	1,814018	2,208040	2,685064	3,262038	3,959260	4,801021	5,816365
41	1,841229	2,252200	2,752190	3,359899	4,097834	4,993061	6,078101
42	1,868847	2,297244	2,820995	3,460696	4,241258	5,192784	6,351615
43	1,896880	2,343189	2,891520	3,564517	4,389702	5,400495	6,637438
44	1,925333	2,390053	2,963808	3,671452	4,543342	5,616515	6,936123
45	1,954213	2,437854	3,037903	3,781596	4,702359	5,841176	7,248248
46	1,983526	2,486611	3,113851	3,895044	4,866941	6,074823	7,574420
47	2,013279	2,536344	3,191697	4,011895	5,037284	6,317816	7,915268
48	2,043478	2,587070	3,271490	4,132252	5,213589	6,570528	8,271456
49	2,074130	2,638812	3,353277	4,256219	5,396065	6,833349	8,643671
50	2,105242	2,691588	3,437109	4,383906	5,584927	7,106683	9,032636

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Мультиязычные приложения на заказ

Число периодов	Ставка процентов						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	1,0500000	1,0550000	1,0600000	1,0650000	1,0700000	1,0750000	1,0800000
2	1,1025000	1,1130250	1,1236000	1,1342250	1,1449000	1,1556250	1,1664000
3	1,1576250	1,1742414	1,1910160	1,2079496	1,2250430	1,2422969	1,2597120
4	1,2155063	1,2388247	1,2624770	1,2864664	1,3107960	1,3354691	1,3604890
5	1,2762216	1,3069600	1,3382256	1,3700867	1,4025517	1,4356293	1,4693281
6	1,3400956	1,3788428	1,4185191	1,4591423	1,5007304	1,5433015	1,5868743
7	1,4071004	1,4546792	1,5036303	1,5539865	1,6057815	1,6590491	1,7138243
8	1,4774554	1,5346865	1,5933848	1,6549957	1,7181862	1,7834778	1,8509302
9	1,5513282	1,6190943	1,6894790	1,7625704	1,8384592	1,9172387	1,9990046
10	1,6288946	1,7081445	1,7908477	1,8771375	1,9671514	2,0610316	2,1589250
11	1,7103394	1,8020924	1,8982986	1,9991514	2,1048520	2,2156089	2,3316390
12	1,7958563	1,9012075	2,0121965	2,1290962	2,2521916	2,3817796	2,5181701
13	1,8856491	2,0057739	2,1329283	2,2674875	2,4098450	2,5604131	2,7196237
14	1,9799916	2,1160995	2,2609040	2,4148742	2,5785342	2,7520440	2,9371936
15	2,0789282	2,2324765	2,3965682	2,5718410	2,7590315	2,9588774	3,1721691
16	2,1828746	2,3552627	2,5403517	2,7390107	2,9521637	3,1807932	3,4259426
17	2,2920183	2,4848021	2,6927728	2,9170464	3,1588152	3,4193526	3,7000181
18	2,4066192	2,6214663	2,8543392	3,1066544	3,3799323	3,6758041	3,9960195
19	2,5269502	2,7656469	3,0255995	3,3085869	3,6165275	3,9514894	4,3157011
20	2,6532977	2,9177575	3,2071355	3,5236341	3,8696845	4,2478511	4,6609571
21	2,7859266	3,0782342	3,3995636	3,7526820	4,1405624	4,5664399	5,0338337
22	2,9252620	3,2475370	3,6035374	3,9966063	4,4304017	4,9089229	5,4365404
23	3,0715238	3,4261516	3,8197497	4,2563857	4,7405299	5,2770921	5,8714636
24	3,2250999	3,6145899	4,0489346	4,5330508	5,0723670	5,6728741	6,3411807
25	3,3863549	3,8133923	4,2918707	4,8276991	5,4274326	6,0983396	6,8484752
26	3,5556727	4,0231289	4,5493830	5,1414996	5,8073529	6,5557151	7,3963532
27	3,7333456	4,2444010	4,8223459	5,4756970	6,2138676	7,0473937	7,9880615
28	3,9201291	4,4778313	5,1116867	5,8316173	6,6488384	7,5759482	8,6271064
29	4,1161356	4,7241244	5,4183879	6,2106725	7,1142570	8,1441444	9,3172749
30	4,3219424	4,9839513	5,7434912	6,6143662	7,6122550	8,7549552	10,062657
31	4,5380395	5,2580686	6,0881006	7,0443000	8,1451129	9,4115768	10,867669
32	4,7649415	5,5472624	6,4533867	7,5021795	8,7152708	10,117445	11,737083
33	5,0031885	5,8523618	6,8405899	7,9898211	9,3253398	10,876253	12,676050
34	5,2533480	6,1742417	7,2510253	8,5091595	9,9781135	11,691972	13,690134
35	5,5160154	6,5138250	7,6860668	9,0622549	10,676581	12,568870	14,785344
36	5,7918161	6,8720854	8,1472520	9,6513014	11,423942	13,511536	15,968172
37	6,0814069	7,2500501	8,6360871	10,278636	12,223618	14,524901	17,245626
38	6,3854773	7,6488028	9,1542523	10,946747	13,079271	15,614268	18,625276
39	6,7047512	8,0694870	9,7035075	11,658286	13,994820	16,785339	20,115298
40	7,0399887	8,5133088	10,285718	12,416075	14,974458	18,044239	21,724521
41	7,3919881	8,9815408	10,902861	13,223119	16,022670	19,397557	23,462483
42	7,7615876	9,4755255	11,557033	14,082622	17,144257	20,852374	25,339482
43	8,1496669	9,9966794	12,250455	14,997993	18,344355	22,416302	27,366640
44	8,5571603	10,546497	12,985482	15,972862	19,628460	24,097524	29,569772
45	8,9850078	11,126554	13,764611	17,011096	21,002452	25,904839	31,920449
46	9,4342582	11,73815	14,590487	18,116820	22,472623	27,847702	34,474085
47	9,9059711	12,384133	15,465917	19,294413	24,045707	29,936279	37,232012
48	10,401270	13,065260	16,393872	20,548550	25,728907	32,181500	40,210573
49	10,921333	13,783849	17,377504	21,884205	27,529930	34,595113	43,427419
50	11,467400	14,541961	18,420154	23,306679	29,457025	37,189746	46,901613

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Мультиязычные приложения на заказ

Число периодов	Ставка процентов						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	1,0850000	1,0900000	1,0950000	1,1000000	1,1050000	1,1100000	1,1150000
2	1,1772250	1,1881000	1,1990250	1,2100000	1,2210250	1,2321000	1,2432250
3	1,2772891	1,2950290	1,3129324	1,3310000	1,3492326	1,3676310	1,3861959
4	1,3858587	1,41115816	1,4376610	1,4644000	1,4909021	1,5180704	1,5456084
5	1,5036567	1,5386240	1,5742387	1,6105100	1,6474468	1,6850582	1,7233534
6	1,6314675	1,6771001	1,72337914	1,7715610	1,8204287	1,8704146	1,9215390
7	1,7701422	1,8280391	1,8875516	1,9487171	2,0115737	2,0761602	2,1425160
8	1,9206043	1,9925626	2,0668690	2,1435888	2,2227889	2,3045378	2,3889053
9	2,0838557	2,1718933	2,2632216	2,3579477	2,4561818	2,5580369	2,6636294
10	2,2609834	2,3673637	2,4782276	2,5937425	2,7140808	2,8394210	2,9699468
11	2,4531670	2,5804264	2,7136592	2,8531167	2,9990593	3,1517573	3,3114907
12	2,6616862	2,8126648	2,9714569	3,1384284	3,3139606	3,4984506	3,6923121
13	2,8879296	3,0658046	3,2537453	3,4522712	3,6619264	3,8832802	4,1169280
14	3,1334036	3,3417270	3,5628511	3,7974983	4,0464287	4,3104410	4,5903748
15	3,3997429	3,6424825	3,9013219	4,1772482	4,4713037	4,7845895	5,1182679
16	3,6887210	3,9703059	4,2719475	4,5949730	4,9407906	5,3108943	5,7068687
17	4,0022623	4,3276334	4,6777825	5,0544703	5,4595736	5,8950927	6,3631586
18	4,3424546	4,7171204	5,1221719	5,5699173	6,0328288	6,5435529	7,0949218
19	4,7115632	5,1416613	5,6087782	6,1159090	6,6662759	7,2633437	7,9108378
20	5,1120641	5,6044108	6,1416121	6,7274999	7,3662348	8,0623115	8,8205842
21	5,5465700	6,1088077	6,7250653	7,4002499	8,1396895	8,9491658	9,8349513
22	6,0180285	6,6586004	7,3639465	8,1402749	8,9943569	9,9335740	10,9659710
23	6,5295609	7,2578745	8,0635214	8,9453024	9,9887644	11,026267	12,227057
24	7,0845736	7,9110832	8,8295589	9,8497327	10,982335	12,239157	13,633169
25	7,6867624	8,6203807	9,6683637	10,834706	12,135840	13,585464	15,200983
26	8,3401372	9,3991579	10,586858	11,918177	13,409705	15,079686	16,949096
27	9,0490488	10,245082	11,592610	13,109994	14,817724	16,738650	18,898243
28	9,8182180	11,167140	12,693908	14,420994	16,373585	18,579901	21,071540
29	10,652766	12,172182	13,899829	15,863093	18,092812	20,623691	23,494768
30	11,558252	13,267678	15,220313	17,449402	19,992557	22,892297	26,196666
31	12,540703	14,461770	16,666242	19,194342	22,091775	25,410449	29,209282
32	13,606663	15,763329	18,249535	21,113777	24,411412	28,205599	32,568350
33	14,763229	17,182028	19,983241	23,225154	26,974610	31,308214	36,313710
34	16,018104	18,728411	21,881649	25,547670	29,806944	34,752118	40,489787
35	17,379642	20,413968	23,960406	28,102437	32,936673	38,574851	45,146112
36	18,856912	22,251225	26,236644	30,912681	36,395024	42,818085	50,337915
37	20,459750	24,253835	28,729126	34,003949	40,216501	47,528074	56,126776
38	22,198828	26,436680	31,458393	37,404343	44,439234	52,756162	62,581355
39	24,085729	28,815982	34,446940	41,144778	49,105354	58,259340	69,778211
40	26,133016	31,409420	37,719399	45,259256	54,261416	65,00867	77,802705
41	28,354322	34,236268	41,302742	49,785181	59,958864	72,150963	86,750016
42	30,764439	37,317532	45,226503	54,763699	66,254545	80,087569	96,726268
43	33,379417	40,676110	49,523020	60,240069	73,211272	88,897201	107,84979
44	36,216667	44,336960	54,227707	66,264076	80,898456	98,675893	120,25251
45	39,295084	48,327286	59,379340	72,890484	89,392794	109,53024	134,08155
46	42,635166	52,676742	65,020377	80,179532	98,779037	121,57857	149,50093
47	46,259155	57,417649	71,197313	88,197485	109,15084	134,95221	166,69354
48	50,191183	62,585237	77,961057	97,017234	120,61167	149,79695	185,86330
49	54,457434	68,217908	85,367358	106,71896	133,27590	166,27462	207,23758
50	59,086316	74,357520	93,477257	117,39085	147,26987	184,56483	231,06990

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Мультипериодные ставки на заказ

Число периодов	Ставка процентов						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	1,1200000	1,1260000	1,1300000	1,1360000	1,1400000	1,1450000	1,1500000
2	1,2544000	1,2656250	1,2769000	1,2882250	1,2996000	1,3110250	1,3225000
3	1,4049280	1,4238281	1,4428970	1,4621354	1,4815400	1,5011236	1,5208750
4	1,5735194	1,6018066	1,6304736	1,6595237	1,6889602	1,7187866	1,7490063
5	1,7623417	1,8020325	1,8424352	1,8835693	1,9254146	1,9680106	2,0113572
6	1,9738227	2,0272865	2,0819518	2,1378399	2,1949726	2,2533721	2,3130608
7	2,2106814	2,2806973	2,3526055	2,4264482	2,5022688	2,5801111	2,6600199
8	2,4759632	2,5657845	2,6584442	2,7540187	2,8525864	2,9542272	3,0590229
9	2,7730788	2,8865076	3,0040419	3,1258113	3,2519485	3,3825902	3,5178763
10	3,1058482	3,2473210	3,3945674	3,5477958	3,7072213	3,8730657	4,0455577
11	3,4785500	3,6532362	3,8358612	4,0267482	4,2262323	4,4346603	4,6523914
12	3,8959760	4,1098907	4,3345231	4,5670392	4,8179048	5,0776860	5,3502501
13	4,3634931	4,6236270	4,8980111	5,1873577	5,4924115	5,8139505	6,1527876
14	4,8871123	5,2015804	5,5347525	5,8876510	6,2613491	6,6569733	7,0757058
15	5,4735658	5,8517779	6,2542704	6,6824839	7,1379380	7,6222344	8,1307616
16	6,1303937	6,5832502	7,0673255	7,5846193	8,1372493	8,7274584	9,3576209
17	6,8660409	7,4061564	7,9860778	8,6085429	9,2764642	9,9929399	10,761264
18	7,6899658	8,3319260	9,0242680	9,7706961	10,575169	11,441916	12,375454
19	8,6127617	9,3734167	10,197423	11,089740	12,065693	13,100994	14,231772
20	9,6462931	10,5450904	11,523088	12,586855	13,743490	15,000638	16,366537
21	10,803848	11,863231	13,021089	14,286080	15,667578	17,175731	18,821518
22	12,100310	13,346134	14,713831	16,214701	17,861039	19,666212	21,644766
23	13,552347	15,014440	16,626629	18,403686	20,361585	22,517812	24,891458
24	15,178629	16,891201	18,788091	20,888184	23,212207	25,782895	28,625176
25	17,000064	19,002602	21,230542	23,708088	26,461916	29,521415	32,918563
26	19,044007	21,377927	23,990513	26,908680	30,166584	33,802020	37,896796
27	21,324881	24,050168	27,109279	30,541352	34,389906	38,703313	43,535315
28	23,883866	27,056438	30,633486	34,664435	39,204493	44,315293	50,065612
29	26,749930	30,438493	34,615839	39,344133	44,693122	50,741011	57,575454
30	29,959922	34,243305	39,115898	44,655591	50,950159	58,098457	66,211772
31	33,555113	38,523718	44,200965	50,684096	58,083181	66,522734	76,143538
32	37,581726	43,339183	49,947090	57,526449	66,214826	76,168530	87,565068
33	42,091533	48,756581	56,440212	65,292520	75,484902	87,212967	100,69983
34	47,142517	54,851153	63,777439	74,107010	86,052788	99,858847	115,80480
35	52,799620	61,707547	72,068506	84,111457	98,100178	114,33838	133,17552
36	59,135574	69,420991	81,437412	95,466503	111,83420	130,91744	153,15185
37	66,231843	78,098615	92,024276	108,35448	127,49099	149,90047	176,12463
38	74,179664	87,860942	103,98743	122,98234	145,33973	171,63604	202,54332
39	83,081224	98,843559	117,50580	139,58495	165,68729	196,52327	232,92482
40	93,050970	111,19900	132,78155	158,42892	188,88351	225,01914	267,86355
41	104,21709	125,09888	150,04315	179,81682	215,32721	257,64692	308,04308
42	116,72314	140,73624	169,54876	204,09210	245,47301	295,00572	354,24954
43	130,72991	158,32827	191,59010	231,64453	279,83924	337,78155	407,38697
44	146,41750	178,11930	216,49682	262,91654	319,01673	386,75988	468,49502
45	163,98760	200,38422	244,64140	298,41027	363,67907	442,84006	538,76927
46	183,66612	225,43224	276,44478	338,69566	414,59414	507,05187	619,58466
47	205,70605	253,61127	312,38261	384,41957	472,63732	580,57439	712,52236
48	230,39078	285,31268	352,99234	436,31622	538,80655	664,75768	819,40071
49	258,03767	320,97677	398,88135	495,21890	614,23946	761,14754	942,31082
50	289,00219	361,09886	450,73593	562,07346	700,23299	871,51393	1083,6574

http://

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Мультипериодные приложения на заказ

Число периодов	Ставка процентов						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	1.1550000	1.1600000	1.1650000	1.1700000	1.1750000	1.1800000	1.1850000
2	1.3340250	1.3456000	1.3572250	1.3689000	1.3806250	1.3924000	1.4042250
3	1.5407989	1.5608960	1.5811671	1.6016130	1.6222344	1.6430320	1.6640066
4	1.7796227	1.8106394	1.8420697	1.8738872	1.9061254	1.9387778	1.9718479
5	2.0554642	2.1003417	2.1459996	2.1924480	2.2396973	2.2877578	2.3366397
6	2.3740612	2.4363963	2.5000895	2.5651642	2.6316444	2.6995542	2.7689180
7	2.7420407	2.8262197	2.9126042	3.0012421	3.0921821	3.1854739	3.2811679
8	3.1670570	3.2784149	3.3931839	3.5114533	3.6333140	3.7588592	3.8881839
9	3.6579508	3.8029613	3.9530693	4.1064003	4.2691440	4.4354539	4.6074980
10	4.2249932	4.4114351	4.6053141	4.8068284	5.0162441	5.2338356	5.4598851
11	4.8797978	5.1172647	5.3651909	5.6239892	5.8940669	6.1759260	6.4699638
12	5.6361665	5.9360270	6.2504474	6.5800674	6.9255521	7.2875926	7.6669072
13	6.5097723	6.8857914	7.2817712	7.6986788	8.1375237	8.5993593	9.0852850
14	7.5187870	7.9875180	8.4832635	9.0074542	9.5615903	10.1472404	10.7660630
15	8.6841989	9.2655209	9.8830019	10.538721	11.234860	11.973748	12.757784
16	10.030250	10.748004	11.513697	12.330304	13.200971	14.129023	15.117974
17	11.584938	12.467685	13.314357	14.264656	15.511141	16.672247	17.914800
18	13.380604	14.462514	15.626678	16.878953	18.225590	19.673251	21.229038
19	15.454596	16.776517	18.205080	19.748375	21.415068	23.214436	25.156410
20	17.850060	19.460759	21.206918	23.105599	25.162705	27.393035	29.810345
21	20.616820	22.574481	24.708389	27.033551	29.566179	32.323781	35.325592
22	23.812427	26.186398	28.785273	31.629255	34.740260	38.142061	41.860432
23	27.450353	30.376222	33.534843	37.006228	40.819806	45.007632	49.604612
24	31.766372	35.236417	39.068093	43.297227	47.963272	53.109006	58.781465
25	36.990160	40.874244	45.514328	50.657326	56.356844	62.686627	69.656036
26	42.671735	47.414123	53.024192	59.269656	66.219292	73.948980	82.542403
27	48.945591	55.000362	61.773184	69.345497	77.807668	87.259797	97.812748
28	56.532157	63.800444	71.965759	81.134232	91.424010	102.96656	115.90811
29	65.294642	74.008515	83.840109	94.927051	107.42321	121.50054	137.35111
30	75.415311	85.849877	97.673727	111.06465	126.22227	143.37064	162.76106
31	87.104684	99.585857	113.78989	129.94564	148.31117	169.17735	192.87186
32	100.60501	115.51959	132.56522	152.03640	174.26563	199.62928	228.55315
33	116.19983	134.00273	154.43849	177.88259	204.76211	235.56255	270.83548
34	134.21080	155.44317	179.92084	208.12263	240.59548	277.96381	320.94005
35	155.01347	180.31407	209.60777	243.50347	282.69969	327.99290	382.31396
36	179.04056	209.16432	244.19306	284.89906	332.17213	387.03680	450.67204
37	206.79185	242.63062	284.48491	333.33191	390.30226	456.70343	534.04636
38	238.84459	281.45151	331.42492	389.99633	458.60515	538.91004	632.84494
39	275.86550	326.48376	386.11004	456.29805	538.86106	635.91385	749.92126
40	318.62465	378.72116	449.81819	533.86871	633.16174	750.37834	888.65669
41	368.01147	439.31654	524.03819	624.62639	743.96505	885.44645	1053.0582
42	425.05325	509.60719	610.50449	730.81288	874.15893	1044.8268	1247.8739
43	490.93650	591.14434	711.23774	855.05107	1027.13674	1232.8956	1478.7306
44	567.03166	685.72744	828.59196	1000.40975	1206.88567	1454.8168	1752.2958
45	654.92156	795.44383	965.30964	1170.47941	1418.09066	1716.6839	2076.4705
46	756.43441	922.71484	1124.5857	1369.46091	1666.25653	2025.6870	2460.6175
47	873.68174	1070.3492	1310.1424	1602.26927	1957.85142	2390.3106	2915.8318
48	1009.1024	1241.6051	1526.3159	1874.65504	2300.47542	2820.5665	3455.2607
49	1165.5133	1440.2619	1778.1580	2193.34640	2703.05862	3328.2689	4054.4839
50	1346.1678	1670.7038	2071.5540	2566.21528	3176.09388	3927.3569	4851.9634

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Минимальная стоимость работы на заказ

Число периодов	Стоимость процентов						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	1.1900000	1.1950000	1.2000000	1.2050000	1.2100000	1.2150000	1.2200000
2	1.4161000	1.4280250	1.4400000	1.4520250	1.4641000	1.4762250	1.4884000
3	1.6851590	1.7064899	1.7280000	1.7496901	1.7715610	1.7936134	1.8158480
4	2.0053392	2.0392554	2.0736000	2.1083766	2.1435888	2.1792403	2.2153346
5	2.3863537	2.4369102	2.4883200	2.5405938	2.5937425	2.6477769	2.7027082
6	2.8397609	2.9121077	2.9859840	3.0614155	3.1384284	3.2170489	3.2973040
7	3.3793154	3.4799687	3.5831808	3.6890057	3.7974983	3.9087145	4.0227108
8	4.0213853	4.1585626	4.2998170	4.4452519	4.5949730	4.7490881	4.9077072
9	4.7854486	4.9694823	5.1597804	5.3565285	5.5599173	5.7701420	5.9874028
10	5.6946838	5.9385313	6.1917364	6.4546169	6.7274999	7.0107225	7.3046314
11	6.7766737	7.0965450	7.4300837	7.7778133	8.1402749	8.5180279	8.9116603
12	8.0642417	8.4803712	8.9161004	9.3722651	9.8497327	10.349404	10.872213
13	9.5964477	10.134004	10.699321	11.293579	11.918177	12.574526	13.264100
14	11.4191723	12.110182	12.839185	13.608763	14.420994	15.278049	16.182202
15	13.589530	14.471668	15.407022	16.398560	17.449402	18.562829	19.742287
16	16.171540	17.293643	18.488426	19.760264	21.113777	22.553837	24.085590
17	19.244133	20.665903	22.186111	23.811119	25.547670	27.402913	29.384420
18	22.900518	24.695754	26.623333	28.692398	30.912681	33.294539	35.848992
19	27.251616	29.511426	31.948000	34.574339	37.404343	40.452865	43.735771
20	32.429423	35.266154	38.337600	41.662079	45.259256	49.150230	53.357640
21	38.591014	42.143055	46.005120	50.202805	54.763699	59.717530	65.096321
22	45.923307	50.360950	55.206144	60.494380	66.264076	72.556799	79.417512
23	54.648735	60.181336	66.247373	72.895728	80.179532	88.156511	96.889364
24	65.031994	71.916696	79.496847	87.839353	97.017234	107.11016	118.20502
25	77.388073	85.940452	95.396217	105.84642	117.39085	130.13885	144.21013
26	92.091807	102.69884	114.47546	127.54494	142.04293	158.11870	175.93636
27	109.58925	122.72511	137.37055	153.69165	171.87195	192.11422	214.64236
28	130.41121	146.65651	164.84466	185.19844	207.96506	233.41877	261.86368
29	155.18934	175.25453	197.81359	223.16411	251.63772	283.60381	319.47368
30	184.67531	209.42916	237.37631	268.91276	304.48164	344.57863	389.75789
31	219.76362	250.26785	284.85158	324.03967	368.42278	418.66303	475.50463
32	261.51871	299.07008	341.82189	390.46805	445.79157	508.67559	580.11565
33	311.20726	357.38875	410.18627	470.51400	539.40780	618.04084	707.74109
34	370.33664	427.07955	492.22352	566.96937	652.68344	750.91962	863.44413
35	440.70061	510.36007	590.66823	683.19809	789.74696	912.36733	1053.4018
36	524.43372	609.88028	708.80187	823.25370	955.59382	1108.5263	1285.1502
37	624.07613	728.80693	850.56225	992.02070	1156.2685	1346.8595	1567.8833
38	742.65059	870.92429	1020.6747	1195.3849	1399.0849	1636.4343	1912.8176
39	883.75421	1040.7545	1224.8096	1440.4389	1692.8927	1988.2676	2333.6375
40	1051.6675	1243.7017	1469.7716	1735.7288	2048.4002	2415.7452	2847.0378
41	1251.4843	1486.2235	1763.7259	2091.5532	2478.5643	2935.1304	3473.3861
42	1489.2664	1776.0371	2116.4711	2520.3217	2999.0628	3566.1834	4237.5310
43	1772.2270	2122.3643	2539.7653	3036.9876	3628.8659	4332.9128	5169.7878
44	2108.9501	2536.2253	3047.7183	3659.5700	4390.9278	5264.4891	6307.1411
45	2509.6506	3030.7892	3657.2620	4409.7819	5313.0226	6395.3542	7694.7122
46	2986.4842	3621.7932	4388.7144	5313.7872	6428.7574	7771.5704	9387.5489
47	3553.9162	4328.0428	5266.4573	6403.1136	7778.7964	9442.4580	11452.810
48	4229.1603	5172.0112	6319.7487	7715.7519	9412.3437	11472.587	13972.428
49	5032.7008	6180.5533	7583.6985	9297.4810	11388.936	13939.193	17046.362
50	5988.9139	7385.7612	9100.4382	11203.465	13780.612	16936.119	20796.561

http://

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Минимальные ставки по услугам на ЕНТ

Число периодов	Ставка процентов						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	1.2280000	1.2300000	1.2350000	1.2400000	1.2450000	1.2500000	1.2550000
2	1.5006250	1.5129000	1.5252250	1.5376000	1.5500250	1.5625000	1.5750250
3	1.8382656	1.8608670	1.8836529	1.9066200	1.9297811	1.9531250	1.9766564
4	2.2518754	2.2888664	2.3263113	2.3642138	2.4025575	2.4414063	2.4807038
5	2.7585474	2.8153057	2.8729945	2.9316251	2.9912090	3.0517578	3.1132832
6	3.3792205	3.4628260	3.5481482	3.6352151	3.7240552	3.8146973	3.9071704
7	4.1395451	4.2592760	4.3819630	4.5076667	4.6364487	4.7683716	4.9034989
8	5.0709428	5.2389094	5.4117243	5.5895067	5.7723786	5.9604645	6.1538911
9	6.2119049	6.4438586	6.6834795	6.9309883	7.1866114	7.4505806	7.7231333
10	7.6095835	7.9259461	8.2540971	8.5944255	8.9473312	9.3132257	9.6925323
11	9.3217398	9.7489137	10.193810	10.657088	11.139427	11.641532	12.164128
12	11.419131	11.991164	12.589355	13.214789	13.868587	14.551915	15.265981
13	13.988436	14.749132	15.547854	16.386338	17.266391	18.189894	19.158806
14	17.135834	18.141432	19.201599	20.319059	21.496657	22.737368	24.044301
15	20.991396	22.313961	23.713975	25.195633	26.733338	28.421709	30.175598
16	25.714461	27.446172	29.286760	31.242585	33.320355	35.527137	37.507376
17	31.500214	33.758792	36.169148	38.740806	41.483842	44.408921	47.827312
18	38.587762	41.523314	44.668898	48.038599	51.647384	55.511151	59.646788
19	47.270009	51.073676	55.166809	59.567863	64.300993	69.388939	74.856719
20	57.905761	62.820622	68.130120	73.864150	80.054736	86.736174	93.945183
21	70.934557	77.269364	84.140698	91.591546	99.668146	108.42022	117.90120
22	86.894833	95.041318	103.91376	113.57352	124.08684	135.52527	147.96601
23	106.44617	116.90082	128.33350	140.83116	154.48812	169.40659	185.69734
24	130.39656	143.78801	158.49187	174.63064	192.33771	211.75824	233.05017
25	159.73578	176.85925	195.73746	216.54199	239.46045	264.69780	292.47796
26	195.67634	217.53688	241.73576	268.51207	298.12825	330.87225	367.05984
27	239.70351	267.57036	298.54366	332.95497	371.16968	413.59031	460.66010
28	293.63680	329.11155	368.70142	412.86416	462.10625	516.98788	578.12842
29	359.70508	404.80720	455.34626	511.95156	575.32228	646.23485	725.55117
30	440.63872	497.91286	562.35263	634.81993	716.27624	807.79357	910.56672
31	539.78244	612.43282	694.50549	787.17672	891.76391	1009.7420	1142.7612
32	661.23349	753.29237	857.71428	976.09913	1110.2461	1262.1774	1434.1654
33	810.01102	926.54961	1059.2771	1210.3629	1382.2564	1577.7218	1799.8775
34	992.26350	1139.6560	1308.2073	1500.8500	1720.9092	1972.1523	2258.8463
35	1215.5228	1401.7769	1615.6360	1861.0540	2142.5319	2465.1903	2834.8521
36	1489.0154	1724.1856	1995.3104	2307.7070	2667.4522	3081.4879	3557.7394
37	1824.0439	2120.7483	2464.2084	2861.5567	3320.9780	3851.8599	4464.9629
38	2234.4538	2608.5204	3043.2974	3548.3303	4134.6177	4814.8249	5603.5284
39	2737.2058	3208.4801	3758.4722	4399.9295	5147.5990	6018.5311	7032.4282
40	3353.0772	3946.4305	4641.7132	5455.9126	6408.7607	7523.1638	8825.6974
41	4107.5195	4854.1095	5732.5158	6765.3317	7978.9071	9403.9548	11076.250
42	5031.7114	5970.5547	7079.6570	8389.0113	9933.7393	11754.944	13900.694
43	6163.8465	7343.7823	8743.3764	10402.374	12367.505	14693.679	17445.371
44	7550.7120	9032.8522	10798.070	12898.944	15397.544	18367.099	21893.941
45	9249.6221	11110.408	13335.616	15994.690	19169.943	22958.874	27476.895
46	11330.787	13665.802	16469.486	19833.416	23866.579	28698.593	34483.504
47	13880.214	16806.937	20339.815	24593.436	29713.890	35873.241	43276.797
48	17003.262	20674.992	25119.672	30495.860	36993.794	44841.551	54312.381
49	20828.996	25430.240	31022.795	37814.867	46057.273	56051.939	68162.038
50	25515.521	31279.195	38313.152	46890.435	57341.305	70064.923	85543.357

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 1

Минимальная стоимость работы на заказ в рублях

Число периодов	Ставка процентов						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	1,2600000	1,2650000	1,2700000	1,2750000	1,2800000	1,2850000	1,2900000
2	1,5876000	1,6002250	1,6129000	1,6256250	1,6384000	1,6512250	1,6641000
3	2,0003400	2,0242846	2,0483830	2,0726719	2,0971520	2,1218241	2,1466890
4	2,5204738	2,5607201	2,6014464	2,6426566	2,6843546	2,7265440	2,7692288
5	3,1757969	3,2393109	3,3038369	3,3693872	3,4359738	3,5036090	3,5723052
6	4,0015041	4,0972282	4,1958729	4,2965687	4,3982465	4,5021376	4,6082737
7	5,0418952	5,1836262	5,3287586	5,4773601	5,6294995	5,7852468	5,9446730
8	6,3527880	6,5572872	6,7675234	6,9836341	7,2057594	7,4340422	7,6686282
9	8,0045128	8,2949683	8,5947547	8,9041335	9,2233720	9,5527442	9,8925304
10	10,085686	10,493135	10,915339	11,352770	11,805916	12,275276	12,761364
11	12,707965	13,873816	13,862480	14,474782	15,111573	15,773730	16,462160
12	16,012035	16,791377	17,605350	18,455347	19,342813	20,269243	21,236186
13	20,175165	21,241092	22,358794	23,530568	24,758801	26,045977	27,394680
14	25,420707	26,869981	28,395668	30,001474	31,691265	33,469081	35,339137
15	32,030091	33,990526	36,062499	38,2051879	40,56819	43,007769	45,587487
16	40,357915	42,998015	45,799373	48,771146	51,922969	55,264983	58,807859
17	50,850973	54,392489	58,165204	62,183211	66,461400	71,015503	75,862137
18	64,072226	68,806499	73,869809	79,283593	85,070592	91,254922	97,862157
19	80,731005	87,040221	93,814658	101,08658	108,89036	117,26257	126,24218
20	101,72107	110,10588	119,14462	128,88539	139,37966	150,68241	162,85242
21	128,16854	139,28394	151,31366	164,32887	178,40596	193,62689	210,07962
22	161,49236	176,19418	192,16835	209,51931	228,35963	248,81056	271,00271
23	203,48038	222,88564	244,05380	267,13713	292,30033	319,72157	349,59349
24	256,38528	281,95033	309,94833	340,59984	374,14442	410,84222	450,97560
25	323,04545	356,66717	393,63438	434,26479	478,90486	527,93225	581,75853
26	407,03727	451,18397	499,91566	553,68761	612,99822	678,39294	750,46850
27	512,86696	570,74772	634,89289	705,95170	784,63772	871,73493	968,10436
28	646,21236	721,99587	806,31397	900,08842	1004,3363	1120,1794	1248,8546
29	814,22758	913,32478	1024,0187	1147,6127	1285,5504	1439,4305	1611,0225
30	1025,9267	1155,3558	1300,5038	1463,2062	1645,5046	1849,6682	2078,2190
31	1292,6677	1461,5251	1651,6398	1865,5879	2106,2458	2376,8236	2680,9025
32	1628,7613	1848,8293	2097,5826	2378,6246	2695,9947	3054,2184	3458,3642
33	2052,2392	2338,7691	2663,9299	3032,7464	3450,8732	3924,6706	4461,2898
34	2585,8215	2958,5429	3383,1910	3866,7517	4417,1177	5043,2017	5755,0639
35	3258,1350	3742,5567	4296,6525	4930,1084	5653,9106	6480,5142	7424,0324
36	4105,2501	4734,3343	5456,7487	6285,8882	7237,0056	8327,4608	9577,0018
37	5172,6152	5988,9329	6930,0709	8014,5074	9263,3671	10700,787	12354,332
38	6517,4951	7576,0001	8801,1900	10218,497	11857,110	13750,511	15937,089
39	8212,0438	9583,6401	11177,5113	13028,584	15177,101	17669,407	20568,844
40	10347,1752	12123,3047	14195,4393	16611,444	19426,689	22705,188	26520,909
41	13037,4408	15335,9804	18028,2080	21179,591	24866,162	29176,167	34211,973
42	16427,1754	19400,0153	22895,8241	27003,979	31828,687	37491,374	44133,444
43	20698,2410	24541,0193	29077,6966	34430,073	40740,720	48176,416	56932,146
44	26079,7837	31044,3894	36928,6747	43898,343	52148,121	61906,695	73442,466
45	32860,5275	39271,1526	46899,4169	55970,388	66749,595	79550,103	94740,782
46	41404,2646	49678,0081	59562,2594	71362,244	85439,481	102221,88	122215,61
47	52169,3734	62842,6802	75644,0695	90986,861	109362,54	131385,12	157668,13
48	65733,4105	79495,9904	96067,9683	116008,25	139984,05	168791,33	203378,99
49	82824,0972	100562,428	122006,320	147910,52	179179,58	216896,86	262358,90
50	104358,362	127211,471	154948,026	188585,91	229349,86	278712,46	338442,98

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Окончание приложения 1

Минимальная ставка за работу на заказ

Число периодов	Ставка процентов						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	1,2960000	1,3000000	1,3050000	1,3100000	1,3150000	1,3200000	1,3250000
2	1,6770250	1,6900000	1,7030250	1,7161000	1,7292250	1,7424000	1,7556250
3	2,1717474	2,1970000	2,2224476	2,2480910	2,2739300	2,2999680	2,3262031
4	2,8124129	2,8561000	2,9002942	2,9449992	2,9902191	3,0359578	3,0822191
5	3,6420746	3,7129300	3,7848839	3,8579490	3,9321381	4,0074642	4,0839404
6	4,7164867	4,8268090	4,9392734	5,0539131	5,1707616	5,2898528	5,4112210
7	6,1078502	6,2748517	6,4457518	6,6206262	6,7995515	6,9826057	7,1698678
8	7,9096660	8,1573072	8,4117062	8,6730203	8,9414103	9,2170395	9,5000748
9	10,243018	10,604499	10,977277	11,361657	11,757955	12,166492	12,587599
10	13,264708	13,785849	14,325346	14,883770	15,461710	16,059770	16,678569
11	17,177796	17,921604	18,694576	19,497739	20,332149	21,198896	22,099104
12	22,245246	23,298085	24,396422	25,542038	26,736776	27,982548	29,281312
13	28,807594	30,287511	31,837331	33,460700	35,158860	36,936956	38,797739
14	37,305834	39,373764	41,547717	43,832692	46,233901	48,756782	51,407004
15	48,311056	51,185893	54,219771	57,420826	60,797580	64,358953	68,114281
16	62,562817	66,541661	70,756801	75,221282	79,948818	84,953818	90,521422
17	81,018848	86,504159	92,337625	98,539879	105,132695	112,139039	119,583134
18	104,91941	112,45541	120,50060	129,08724	138,24949	148,02353	158,44765
19	135,87063	146,19203	157,25328	169,10429	181,79808	195,39106	209,94314
20	175,95247	190,04964	205,21553	221,52662	239,06448	257,91620	278,17466
21	227,85845	247,06453	267,80627	290,19987	314,36979	340,44939	368,58142
22	295,07669	321,18389	349,48719	380,16183	413,39628	449,39910	488,37039
23	382,12432	417,53905	456,08078	498,01199	543,61611	593,19961	647,09076
24	494,85099	542,80077	595,18541	652,39571	714,85518	783,02269	857,39526
25	640,83203	705,64100	776,71697	854,63838	940,03456	1033,5900	1136,0487
26	829,87748	917,33330	1013,6156	1119,5763	1236,1454	1364,3388	1505,2646
27	1074,6913	1192,5333	1322,7684	1466,6449	1625,5313	1800,9271	1994,4755
28	1391,7253	1550,2933	1726,2128	1921,3048	2137,5736	2377,2238	2642,6801
29	1802,2842	2015,3813	2252,7077	2516,9093	2810,9093	3137,9354	3501,5511
30	2333,9581	2619,9956	2939,7835	3297,1512	3696,3457	4142,0748	4639,5552
31	3022,4757	3405,9943	3836,4175	4319,2681	4860,6946	5467,5387	6147,4107
32	3914,1061	4427,7926	5006,5248	5658,2413	6391,8134	7217,1511	8145,3191
33	5068,7673	5756,1304	6533,5149	7412,2960	8405,2347	9526,6395	10792,5479
34	6564,0537	7482,9696	8526,2369	9710,1078	11052,884	12575,164	14300,126
35	8500,4496	9727,8604	11126,739	12720,241	14534,542	16599,217	18947,667
36	11008,082	12646,219	14520,395	16663,516	19112,923	21910,966	25105,659
37	14255,466	16440,084	18949,115	21829,206	25133,493	28922,475	33264,998
38	18460,829	21372,109	24728595	28596,260	33050,544	38177,667	44076,122
39	23906,774	27783,742	32270,817	37461,100	43461,465	50394,520	58400,861
40	30959,272	36118,865	42113,416	49074,042	57151,826	66520,767	77381,141
41	40092,257	46954,524	54958,007	64286,994	75154,652	87807,412	102530,012
42	51919,473	61040,882	71720,200	84215,963	98828,367	115905,78	135852,27
43	67235,717	79353,146	93594,861	110322,91	129959,30	152995,64	180004,25
44	87070,254	103159,09	122141,29	144523,01	170896,48	201954,24	238505,63
45	112755,98	134106,82	159394,39	189325,15	224728,87	266579,60	316019,97
46	146018,99	174338,86	208009,68	248015,94	295518,47	351885,07	418726,46
47	189094,60	226640,52	271452,63	324900,89	388606,79	464488,29	55481255
48	248877,50	294632,68	354245,68	425620,16	511017,93	613124,54	735126,63
49	317116,36	383022,48	462290,61	557562,41	671988,57	809324,39	974042,79
50	410665,69	497929,22	603289,25	730406,76	883664,97	1068308,2	1290606,7

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Приложение 2

Число периодов	Стоимость в рублях						
	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
1	0,9852217	0,9803922	0,9756098	0,9708738	0,9661836	0,9615385	0,9569378
2	0,9706617	0,9611688	0,9518144	0,9425959	0,9335107	0,9245562	0,9157300
3	0,9563170	0,9423223	0,9285994	0,9151417	0,9019427	0,8889964	0,8762966
4	0,9421842	0,9238454	0,9059506	0,8884870	0,8714422	0,8548042	0,8385613
5	0,9282603	0,9057308	0,8838543	0,8626088	0,8419732	0,8219271	0,8024510
6	0,9145422	0,8879714	0,8622969	0,8374843	0,8135006	0,7903145	0,7678957
7	0,9010268	0,8705602	0,8412652	0,8130915	0,7859910	0,7599178	0,7348285
8	0,8877111	0,8534904	0,8207466	0,7894092	0,7594116	0,7306902	0,7031851
9	0,8745922	0,8367553	0,8007284	0,7664167	0,7337310	0,7025867	0,6729044
10	0,8616672	0,8203483	0,7811984	0,7440939	0,7089188	0,6755642	0,6439277
11	0,8489332	0,8042630	0,7621448	0,7224213	0,6849457	0,6495809	0,6161987
12	0,8363874	0,7884932	0,7435559	0,7013799	0,6617833	0,6245970	0,5896639
13	0,8240270	0,7730325	0,7254204	0,6809513	0,6394042	0,6005741	0,5642716
14	0,8118493	0,7578750	0,7077272	0,6611178	0,6177818	0,5774751	0,5399729
15	0,7998515	0,7430147	0,6904656	0,6418619	0,5968906	0,5552645	0,5167204
16	0,7880310	0,7284458	0,6736249	0,6231669	0,5767059	0,5339082	0,4944693
17	0,7763853	0,7141626	0,6571951	0,6050164	0,5572038	0,5133732	0,4731764
18	0,7649116	0,7001594	0,6411659	0,5873946	0,5383611	0,4936281	0,4528004
19	0,7536075	0,6864308	0,6255277	0,5702860	0,5201557	0,4746424	0,4333018
20	0,7424704	0,6729713	0,6102709	0,5536758	0,5025659	0,4563869	0,4146429
21	0,7314979	0,6597758	0,5953863	0,5375493	0,4855709	0,4388336	0,3967874
22	0,7206876	0,6468390	0,5808647	0,5218925	0,4691506	0,4219554	0,3797009
23	0,7100371	0,6341559	0,5666972	0,5066917	0,4532856	0,4057263	0,3633501
24	0,6995439	0,6217215	0,5528754	0,4919337	0,4379571	0,3901215	0,3477035
25	0,6892058	0,6095309	0,5393906	0,4776056	0,4231470	0,3751168	0,3327306
26	0,6790205	0,5975793	0,5262347	0,4636947	0,4088377	0,3606892	0,3184025
27	0,6689857	0,5858620	0,5133997	0,4501891	0,3950122	0,3468166	0,3046914
28	0,6590992	0,5743746	0,5008778	0,4370768	0,3816543	0,3334775	0,2915707
29	0,6493589	0,5631123	0,4886613	0,4243464	0,3687482	0,3206514	0,2790150
30	0,6397624	0,5520709	0,4767427	0,4119868	0,3562784	0,3083187	0,2670000
31	0,6303078	0,5412460	0,4651148	0,3999871	0,3442303	0,2964603	0,2555024
32	0,6209929	0,5306333	0,4537706	0,3883370	0,3325897	0,2850579	0,2444999
33	0,6118157	0,5202287	0,4427030	0,3770262	0,3213427	0,2740942	0,2339712
34	0,6027741	0,5100282	0,4319053	0,3660449	0,3104761	0,2635521	0,2238959
35	0,5938661	0,5000276	0,4213711	0,3553834	0,2999769	0,2534155	0,2142544
36	0,5850897	0,4902232	0,4110937	0,3450324	0,2898327	0,2436687	0,2050282
37	0,5764431	0,4806109	0,4010670	0,3349829	0,2800316	0,2342968	0,1961992
38	0,5679242	0,4711872	0,3912849	0,3252262	0,2705619	0,2252854	0,1877504
39	0,5595313	0,4619482	0,3817414	0,3157535	0,2614125	0,2166206	0,1796655
40	0,5512623	0,4528904	0,3724306	0,3065568	0,2525725	0,2082890	0,1719287
41	0,5431156	0,4440102	0,3633469	0,2976280	0,2440314	0,2002779	0,1645251
42	0,5350892	0,4353041	0,3544848	0,2889592	0,2357791	0,1925749	0,1574403
43	0,5271815	0,4267688	0,3458389	0,2805429	0,2278059	0,1851682	0,1506605
44	0,5193907	0,4184007	0,3374038	0,2723718	0,2201023	0,1780463	0,1441728
45	0,5117149	0,4101968	0,3291744	0,2644386	0,2126592	0,1711984	0,1379644
46	0,5041527	0,4021537	0,3211458	0,2567365	0,2054679	0,1646139	0,1320233
47	0,4967021	0,3942684	0,3133129	0,2492588	0,1985197	0,1582826	0,1263381
48	0,4893617	0,3865376	0,3056712	0,2419988	0,1918065	0,1521948	0,1208977
49	0,4821297	0,3789584	0,2982158	0,2349503	0,1853202	0,1463411	0,1156916
50	0,4750047	0,3715279	0,2909422	0,2281071	0,1790534	0,1407126	0,1107096

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	0,9623810	0,9478673	0,9433962	0,9389671	0,9345794	0,9302326	0,9259299
2	0,9070295	0,8984524	0,8899964	0,8816593	0,8734387	0,8653326	0,8573388
3	0,8638376	0,8516137	0,8396193	0,8278491	0,8162979	0,8049606	0,7938322
4	0,8227025	0,8072167	0,7920937	0,7773231	0,7628952	0,7488005	0,7350299
5	0,7835262	0,7651344	0,7472582	0,7298808	0,7129862	0,6965586	0,6805832
6	0,7462154	0,7252458	0,7049605	0,6853341	0,6663422	0,6479615	0,6301696
7	0,7106813	0,6874368	0,6650571	0,6435062	0,6227497	0,6027549	0,5834904
8	0,6768394	0,6519989	0,6274124	0,6042312	0,5820091	0,5607022	0,5402689
9	0,6446089	0,6176293	0,5918985	0,5673532	0,5439337	0,5215835	0,5002490
10	0,6139133	0,5854306	0,5583948	0,5327260	0,5083493	0,4851939	0,4631935
11	0,5846793	0,5549105	0,5267875	0,5002122	0,4750928	0,4513432	0,4288829
12	0,5568374	0,5259815	0,4969694	0,4696829	0,4440120	0,4198541	0,3971138
13	0,5303214	0,4985606	0,4688390	0,4411068	0,4149644	0,3905620	0,3676979
14	0,5050680	0,4725694	0,4423010	0,4141002	0,3878172	0,3633135	0,3404610
15	0,4810171	0,4479330	0,4172651	0,3888265	0,3624460	0,3379660	0,3152417
16	0,4581115	0,4245811	0,3936463	0,3650953	0,3387346	0,3143870	0,2918905
17	0,4362967	0,4024465	0,3713644	0,3428125	0,3165744	0,2924530	0,2702690
18	0,4155207	0,3814659	0,3503438	0,3218897	0,2958639	0,2720493	0,2502490
19	0,3957340	0,3615791	0,3305130	0,3022438	0,2765083	0,2530691	0,2317121
20	0,3768895	0,3427290	0,3118047	0,2837970	0,2584190	0,2354131	0,2145482
21	0,3589424	0,3248616	0,2941554	0,2664761	0,2415131	0,2189890	0,1986557
22	0,3418499	0,3079257	0,2775051	0,2502123	0,2257132	0,2037107	0,1839405
23	0,3255713	0,2918727	0,2617973	0,2349411	0,2109469	0,1894983	0,1703153
24	0,3100679	0,2766566	0,2469785	0,2206020	0,1971466	0,1762775	0,1576993
25	0,2953028	0,2622337	0,2329986	0,2071380	0,1842492	0,1639791	0,1460179
26	0,2812407	0,2485628	0,2198100	0,1944958	0,1721955	0,1525387	0,1352018
27	0,2678483	0,2356045	0,2073680	0,1826252	0,1609304	0,1418964	0,1251868
28	0,2550936	0,2233218	0,1956301	0,1714790	0,1504022	0,1319967	0,1159137
29	0,2429463	0,2116794	0,1845567	0,1610132	0,1405628	0,1227876	0,1073275
30	0,2313774	0,2006440	0,1741101	0,1511861	0,1313671	0,1142210	0,0993773
31	0,2203895	0,1901839	0,1642548	0,1419587	0,1227730	0,1062551	0,0920160
32	0,2098662	0,1802691	0,1549574	0,1332946	0,1147411	0,0988392	0,0852000
33	0,1998725	0,1708712	0,1461862	0,1251592	0,1072347	0,0919434	0,0788889
34	0,1903548	0,1619632	0,1379115	0,1175204	0,1002193	0,0855288	0,0730453
35	0,1812903	0,1535196	0,1301052	0,1103478	0,0936629	0,0795616	0,0676345
36	0,1726574	0,1455162	0,1227408	0,1036130	0,0875355	0,0740108	0,0626246
37	0,1644356	0,1379301	0,1157932	0,0972892	0,0818088	0,0688473	0,0579857
38	0,1566054	0,1307394	0,1092389	0,0913513	0,0764569	0,0640440	0,0536905
39	0,1491480	0,1239236	0,1030555	0,0857759	0,0714550	0,0595758	0,0497134
40	0,1420457	0,1174631	0,0972222	0,0805408	0,0667804	0,0554194	0,0460309
41	0,1352816	0,1113395	0,0917190	0,0756251	0,0624116	0,0515529	0,0426212
42	0,1288396	0,1055350	0,0865274	0,0710095	0,0583286	0,0479562	0,0394641
43	0,1227044	0,1000332	0,0816296	0,0666756	0,0545127	0,0446104	0,0365408
44	0,1168613	0,0948182	0,0770091	0,0626062	0,0509464	0,0414980	0,0338341
45	0,1112965	0,0898751	0,0726501	0,0587852	0,0476135	0,0386028	0,0313279
46	0,1059967	0,0851897	0,0685378	0,0551973	0,0444986	0,0359096	0,0290073
47	0,1009492	0,0807485	0,0646583	0,0518285	0,0415875	0,0334043	0,0268586
48	0,0961421	0,0765389	0,0609984	0,0486652	0,0388668	0,0310738	0,0248691
49	0,0915639	0,0725487	0,0575457	0,0456951	0,0363241	0,0289058	0,0230269
50	0,0872037	0,0687665	0,0542884	0,0429062	0,0339478	0,0268891	0,0213212

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	0,9216590	0,9174312	0,9132420	0,9090909	0,9049774	0,9009009	0,8968610
2	0,8494553	0,8416800	0,8340110	0,8264463	0,8189841	0,8116224	0,8043596
3	0,7829081	0,7721835	0,7616539	0,7513148	0,7411620	0,7311914	0,7213988
4	0,7215743	0,7084252	0,6955743	0,6830135	0,6707349	0,6587310	0,6469944
5	0,6650454	0,6499314	0,6352277	0,6209213	0,6069999	0,5934513	0,5802640
6	0,6129451	0,5962673	0,5801166	0,5644739	0,5493212	0,5346408	0,5204162
7	0,5649264	0,5470342	0,5297868	0,5131581	0,4971232	0,4816584	0,4667410
8	0,5206694	0,5018663	0,4838236	0,4665074	0,4498853	0,4339265	0,4186710
9	0,4798797	0,4604278	0,4418480	0,4240976	0,4071360	0,3909248	0,3754276
10	0,4422854	0,4224108	0,4035142	0,3855433	0,3684489	0,3521845	0,3367064
11	0,4076363	0,3875329	0,3685061	0,3504939	0,3334379	0,3172833	0,3019788
12	0,3757017	0,3555347	0,3365353	0,3186308	0,3017537	0,2858408	0,2708330
13	0,3462688	0,3261786	0,3073381	0,2896644	0,2730803	0,2575143	0,2428996
14	0,3191418	0,2992465	0,2806741	0,2633313	0,2471315	0,2319948	0,2178471
15	0,2941399	0,2745380	0,2563234	0,2393920	0,2236484	0,2090043	0,1953786
16	0,2710967	0,2518698	0,2340853	0,2176291	0,2023968	0,1882922	0,1752274
17	0,2498587	0,2310732	0,2137765	0,1978447	0,1831645	0,1696326	0,1571547
18	0,2302845	0,2119937	0,1952297	0,1798588	0,1657597	0,1528222	0,1409459
19	0,2122438	0,1944897	0,1782920	0,1635080	0,1500088	0,1376776	0,1264089
20	0,1956164	0,1784309	0,1628237	0,1486436	0,1357546	0,1240339	0,1133712
21	0,1802916	0,1636981	0,1486974	0,1351306	0,1228548	0,1117423	0,1016882
22	0,1661674	0,1501817	0,1357968	0,1228460	0,1111808	0,1006687	0,0911912
23	0,1531497	0,1377814	0,1240153	0,1116782	0,1006161	0,0906925	0,0817858
24	0,1411518	0,1264049	0,1132560	0,1015256	0,0910553	0,0817050	0,0733505
25	0,1300938	0,1159678	0,1034301	0,0922960	0,0824030	0,0736081	0,0657852
26	0,1199021	0,1063925	0,0944567	0,0839055	0,0745729	0,0663136	0,0590002
27	0,1105089	0,0976078	0,0862619	0,0762777	0,0674867	0,0597420	0,0529150
28	0,1018515	0,0895484	0,0787779	0,0693433	0,0610740	0,0538216	0,0474574
29	0,0938723	0,0821545	0,0719433	0,0630394	0,0552706	0,0484879	0,0425627
30	0,0865183	0,0753711	0,0657017	0,0573086	0,0500186	0,0436828	0,0381728
31	0,0797403	0,0691478	0,0600015	0,0520987	0,0452657	0,0393539	0,0342357
32	0,0734934	0,0634384	0,0547959	0,0473624	0,0409644	0,0354540	0,0307047
33	0,0677359	0,0582003	0,0500419	0,0430568	0,0370719	0,0319405	0,0275378
34	0,0624294	0,0533948	0,0457004	0,0391425	0,0335492	0,0287752	0,0246976
35	0,0575386	0,0489861	0,0417355	0,0355841	0,0303613	0,0259236	0,0221503
36	0,0530310	0,0449413	0,0381146	0,0323492	0,0274763	0,0233546	0,0198657
37	0,0488765	0,0412306	0,0348079	0,0294083	0,0248654	0,0210402	0,0178168
38	0,0450474	0,0378262	0,0317880	0,0267349	0,0225026	0,0189551	0,0159792
39	0,0415184	0,0347030	0,0290302	0,0243044	0,0203644	0,0170767	0,0143311
40	0,0382658	0,0318376	0,0265116	0,0220949	0,0184293	0,0153844	0,0128530
41	0,0352680	0,0292088	0,0242115	0,0200863	0,0166781	0,0138598	0,0115274
42	0,0325051	0,0267997	0,0221109	0,0182603	0,0150933	0,0124863	0,0103385
43	0,0299586	0,0245845	0,0201926	0,0166002	0,0136591	0,0112489	0,0092722
44	0,0276116	0,0225545	0,0184408	0,0150911	0,0123612	0,0101342	0,0083158
45	0,0254485	0,0206922	0,0168409	0,0137192	0,0111866	0,0091299	0,0074581
46	0,0234548	0,0189837	0,0153798	0,0124720	0,0101236	0,0082251	0,0066889
47	0,0216173	0,0174162	0,0140455	0,0113382	0,0091616	0,0074100	0,0059990
48	0,0199238	0,0159782	0,0128269	0,0103074	0,0082911	0,0066757	0,0053803
49	0,0183630	0,0146589	0,0117141	0,0093704	0,0075032	0,0060141	0,0048254
50	0,0169244	0,0134485	0,0106978	0,0085186	0,0067903	0,0054182	0,0043277

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	0,8928571	0,8888889	0,8849558	0,8810573	0,8771930	0,8733624	0,8695652
2	0,7971939	0,7901235	0,7831467	0,7762619	0,7694675	0,7627620	0,7561437
3	0,7117802	0,7023320	0,6930602	0,6839312	0,6749715	0,6661677	0,6575162
4	0,6355181	0,6242951	0,6133187	0,6025826	0,5920803	0,5818058	0,5717532
5	0,5674269	0,5549290	0,5427599	0,5309097	0,5193687	0,5081273	0,4971767
6	0,5066311	0,4932702	0,4803185	0,4677619	0,4555865	0,4437793	0,4323276
7	0,4523492	0,4384624	0,4250606	0,4121250	0,3996373	0,3875802	0,3759370
8	0,4038832	0,3897443	0,3761599	0,3631057	0,3505591	0,3384980	0,3269018
9	0,3606100	0,3464394	0,3328848	0,3199169	0,3075079	0,2956314	0,2842624
10	0,3219732	0,3079461	0,2945883	0,2818652	0,2697438	0,2581934	0,2471847
11	0,2874761	0,2737299	0,2606977	0,2483393	0,2366174	0,2254964	0,2149432
12	0,2566751	0,2433155	0,2307059	0,2188012	0,2075591	0,1969401	0,1869072
13	0,2291742	0,2162804	0,2041645	0,1927764	0,1820694	0,1720001	0,1625280
14	0,2046198	0,1922493	0,1806766	0,1698470	0,1597100	0,1502184	0,1413287
15	0,1826963	0,1708882	0,1598908	0,1496450	0,1400965	0,1311951	0,1228945
16	0,1631217	0,1519007	0,1414962	0,1318458	0,1228917	0,1145809	0,1068648
17	0,1456443	0,1350228	0,1252179	0,1161637	0,1077997	0,1000707	0,0929259
18	0,1300396	0,1202023	0,1108123	0,1023469	0,0945611	0,0873979	0,0808051
19	0,1161068	0,1066847	0,0980640	0,0901734	0,0829484	0,0763301	0,0702653
20	0,1036668	0,0948308	0,0867823	0,0794480	0,0727617	0,0666638	0,0611003
21	0,0925596	0,0842941	0,0767985	0,0699982	0,0638261	0,0582217	0,0531307
22	0,0826425	0,0749281	0,0679633	0,0616724	0,0559878	0,0508486	0,0462006
23	0,0737880	0,0666027	0,0601445	0,0543369	0,0491121	0,0444093	0,0401744
24	0,0658821	0,0592024	0,0532252	0,0478740	0,0430808	0,0387854	0,0349343
25	0,0588233	0,0526244	0,0471020	0,0421797	0,0377902	0,0338737	0,0303776
26	0,0525208	0,0467772	0,0416831	0,0371627	0,0331493	0,0295840	0,0264153
27	0,0468936	0,0415798	0,0368877	0,0327425	0,0290783	0,0258376	0,0229699
28	0,0418693	0,0369598	0,0326440	0,0288480	0,0255073	0,0225656	0,0199738
29	0,0373833	0,0328531	0,0288885	0,0254167	0,0223748	0,0197079	0,0173685
30	0,0333779	0,0292028	0,0255651	0,0223936	0,0196270	0,0172122	0,0151031
31	0,0298017	0,0259580	0,0226239	0,0197301	0,0172167	0,0150325	0,0131331
32	0,0266087	0,0230738	0,0200012	0,0173833	0,0151024	0,0131288	0,0114201
33	0,0237577	0,0205101	0,0177179	0,0153157	0,0132477	0,0114662	0,0099305
34	0,0212123	0,0182312	0,0156795	0,0134940	0,0116208	0,0100141	0,0086352
35	0,0189395	0,0162055	0,0138757	0,0118890	0,0101937	0,0087460	0,0075089
36	0,0169103	0,0144049	0,0122794	0,0104749	0,0089418	0,0076384	0,0065295
37	0,0150985	0,0128043	0,0108667	0,0092290	0,0078437	0,0066711	0,0056778
38	0,0134808	0,0113816	0,0096165	0,0081312	0,0068804	0,0058263	0,0049372
39	0,0120364	0,0101170	0,0085102	0,0071641	0,0060355	0,0050885	0,0042932
40	0,0107468	0,0089929	0,0075312	0,0063120	0,0052943	0,0044441	0,0037332
41	0,0095954	0,0079937	0,0066647	0,0056120	0,0046441	0,0038813	0,0032463
42	0,0085673	0,0071055	0,0058980	0,0048997	0,0040738	0,0033898	0,0028229
43	0,0076494	0,0063160	0,0052195	0,0043170	0,0035735	0,0029605	0,0024547
44	0,0068298	0,0056142	0,0046190	0,0038035	0,0031346	0,0025856	0,0021345
45	0,0060980	0,0049904	0,0040876	0,0033511	0,0027497	0,0022582	0,0018561
46	0,0054447	0,0044359	0,0036174	0,0029525	0,0024120	0,0019722	0,0016140
47	0,0048613	0,0039430	0,0032012	0,0026013	0,0021158	0,0017224	0,0014035
48	0,0043405	0,0035049	0,0028329	0,0022919	0,0018560	0,0015043	0,0012204
49	0,0038754	0,0031155	0,0025070	0,0020193	0,0016280	0,0013138	0,0010612
50	0,0034602	0,0027693	0,0022186	0,0017791	0,0014281	0,0011474	0,0009228

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	0.8658009	0.8620690	0.8583691	0.8547009	0.8510638	0.8474576	0.8438819
2	0.7496111	0.7431629	0.7367975	0.7305136	0.7243096	0.7181844	0.7121366
3	0.6490140	0.6406577	0.6324442	0.6243706	0.6164337	0.6086309	0.6009591
4	0.5619169	0.5522911	0.5428706	0.5336500	0.5246245	0.5157889	0.5071385
5	0.4865081	0.4761130	0.4659833	0.4561112	0.4464889	0.4371092	0.4279650
6	0.4212191	0.4104423	0.3999857	0.3898386	0.3799906	0.3704315	0.3611519
7	0.3646919	0.3538295	0.3433354	0.3331954	0.3233962	0.3139250	0.3047695
8	0.3157506	0.3050255	0.2947085	0.2847824	0.2752308	0.2660382	0.2571895
9	0.2733771	0.2629530	0.2529686	0.2434037	0.2342390	0.2254561	0.2170375
10	0.2366901	0.2266836	0.2171405	0.2080374	0.1993523	0.1910645	0.1831540
11	0.2049265	0.1954169	0.1863867	0.1778097	0.1696616	0.1619190	0.1545604
12	0.1774256	0.1684628	0.1599885	0.1519741	0.1443928	0.1372195	0.1304307
13	0.1536152	0.1452266	0.1373292	0.1298924	0.1228875	0.1162877	0.1100681
14	0.1330002	0.1251953	0.1178792	0.1110192	0.1045851	0.0985489	0.0928845
15	0.1151517	0.1079270	0.1011838	0.0948882	0.0890086	0.0835160	0.0783835
16	0.0996984	0.0930405	0.0868531	0.0811010	0.0757520	0.0707763	0.0661464
17	0.0863190	0.0802074	0.0745620	0.0693171	0.0644698	0.0599799	0.0558198
18	0.0747350	0.0691443	0.0639931	0.0592454	0.0548679	0.0508304	0.0471053
19	0.0647057	0.0596071	0.0549297	0.0506371	0.0466961	0.0430766	0.0397513
20	0.0560222	0.0513855	0.0471500	0.0432796	0.0397414	0.0365056	0.0335454
21	0.0485041	0.0442978	0.0404721	0.0369911	0.0338224	0.0309370	0.0283084
22	0.0419949	0.0381878	0.0347400	0.0316163	0.0287850	0.0262178	0.0238889
23	0.0363592	0.0329205	0.0298197	0.0270225	0.0244979	0.0222185	0.0201594
24	0.0314798	0.0283797	0.0255963	0.0230961	0.0208493	0.0188292	0.0170122
25	0.0272553	0.0244653	0.0219711	0.0197403	0.0177441	0.0159569	0.0143563
26	0.0235976	0.0210908	0.0188593	0.0168720	0.0151013	0.0135228	0.0121150
27	0.0204308	0.0181817	0.0161883	0.0144205	0.0128522	0.0114600	0.0102236
28	0.0176890	0.0156739	0.0138955	0.0123253	0.0109380	0.0097119	0.0086275
29	0.0153152	0.0135120	0.0119275	0.0105344	0.0093090	0.0082304	0.0072806
30	0.0132599	0.0116482	0.0102382	0.0090038	0.0079225	0.0069749	0.0061440
31	0.0114804	0.0100416	0.0087881	0.0076955	0.0067426	0.0059110	0.0051848
32	0.0099398	0.0086565	0.0075435	0.0065774	0.0057384	0.0050093	0.0043753
33	0.0086059	0.0074625	0.0064751	0.0056217	0.0048837	0.0042452	0.0036923
34	0.0074510	0.0064332	0.0055680	0.0048049	0.0041564	0.0035976	0.0031158
35	0.0064511	0.0055459	0.0047708	0.0041067	0.0035373	0.0030488	0.0026294
36	0.0055853	0.0047809	0.0040951	0.0035100	0.0030105	0.0025837	0.0022189
37	0.0048358	0.0041215	0.0035151	0.0030000	0.0025621	0.0021896	0.0018725
38	0.0041868	0.0035530	0.0030173	0.0025641	0.0021805	0.0018556	0.0015802
39	0.0036250	0.0030629	0.0025899	0.0021916	0.0018558	0.0015725	0.0013335
40	0.0031385	0.0026405	0.0022231	0.0018731	0.0015794	0.0013327	0.0011253
41	0.0027173	0.0022763	0.0019083	0.0016010	0.0013441	0.0011294	0.0009496
42	0.0023526	0.0019623	0.0016380	0.0013683	0.0011440	0.0009571	0.0008014
43	0.0020369	0.0016916	0.0014060	0.0011695	0.0009736	0.0008111	0.0006763
44	0.0017636	0.0014583	0.0012069	0.0009996	0.0008286	0.0006874	0.0005707
45	0.0015269	0.0012572	0.0010359	0.0008544	0.0007052	0.0005825	0.0004816
46	0.0013220	0.0010838	0.0008892	0.0007302	0.0006001	0.0004937	0.0004064
47	0.0011446	0.0009343	0.0007633	0.0006241	0.0005108	0.0004184	0.0003430
48	0.0009910	0.0008054	0.0006552	0.0005334	0.0004347	0.0003545	0.0002894
49	0.0008580	0.0006943	0.0005624	0.0004559	0.0003700	0.0003005	0.0002442
50	0.0007428	0.0005986	0.0004827	0.0003897	0.0003149	0.0002546	0.0002061

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	19.00	19.50	20.00	20.50	21.00	21.50	22.00
1	0.8403361	0.8368201	0.8333333	0.8298755	0.8264463	0.8230453	0.8196721
2	0.7061648	0.7002679	0.6944444	0.6886934	0.6830135	0.6774035	0.6718624
3	0.5934158	0.5859982	0.5787037	0.5715298	0.5644739	0.5575338	0.5507068
4	0.4986688	0.4903751	0.4822531	0.4742986	0.4665074	0.4588755	0.4513991
5	0.4190494	0.4103557	0.4018776	0.3936088	0.3855433	0.3776753	0.3699993
6	0.3521423	0.3433939	0.3348980	0.3266463	0.3186308	0.3108439	0.3032781
7	0.2969179	0.2873589	0.2790816	0.2710758	0.2633313	0.2558386	0.2485886
8	0.2486705	0.2404677	0.2325680	0.2249591	0.2176291	0.2105667	0.2037611
9	0.2089668	0.2012282	0.1938067	0.1866881	0.1798588	0.1733060	0.1670173
10	0.1756024	0.1683918	0.1615056	0.1549279	0.1486436	0.1426387	0.1368994
11	0.1475650	0.1409136	0.1345880	0.1285708	0.1228460	0.1173981	0.1121227
12	0.1240042	0.1179194	0.1121567	0.1066978	0.1015256	0.0966239	0.0919776
13	0.1042052	0.0986773	0.0934639	0.0885459	0.0839055	0.0795259	0.0753915
14	0.0875674	0.0825751	0.0778866	0.0734821	0.0693433	0.0654534	0.0617963
15	0.0735861	0.0691005	0.0649055	0.0609810	0.0573086	0.0538711	0.0506527
16	0.0618370	0.0578247	0.0540879	0.0506066	0.0473624	0.0443384	0.0415186
17	0.0519639	0.0483889	0.0450732	0.0419972	0.0391425	0.0364925	0.0340316
18	0.0436671	0.0404928	0.0375610	0.0348524	0.0323492	0.0300350	0.0278948
19	0.0366951	0.0338852	0.0313009	0.0289232	0.0267349	0.0247201	0.0228646
20	0.0308362	0.0283558	0.0260841	0.0240026	0.0220949	0.0203458	0.0187415
21	0.0259128	0.0237287	0.0217367	0.0199192	0.0182603	0.0167455	0.0153619
22	0.0217754	0.0198567	0.0181139	0.0165305	0.0150911	0.0137823	0.0125717
23	0.0182987	0.0166164	0.0150949	0.0137182	0.0124720	0.0113435	0.0103211
24	0.0153770	0.0139050	0.0125791	0.0113844	0.0103074	0.0093362	0.0084599
25	0.0129219	0.0116360	0.0104826	0.0094477	0.0085186	0.0076841	0.0069343
26	0.0108587	0.0097372	0.0087355	0.0078404	0.0070401	0.0063244	0.0056839
27	0.0091250	0.0081483	0.0072796	0.0065065	0.0058183	0.0052052	0.0046589
28	0.0076681	0.0068187	0.0060663	0.0053996	0.0048085	0.0042841	0.0038188
29	0.0064437	0.0057060	0.0050553	0.0044810	0.0039740	0.0035260	0.0031301
30	0.0054149	0.0047749	0.0042127	0.0037187	0.0032843	0.0029021	0.0025657
31	0.0045503	0.0039957	0.0035106	0.0030860	0.0027143	0.0023886	0.0021030
32	0.0038238	0.0033437	0.0029255	0.0025610	0.0022432	0.0019659	0.0017238
33	0.0032133	0.0027981	0.0024379	0.0021253	0.0018539	0.0016180	0.0014129
34	0.0027002	0.0023415	0.0020316	0.0017638	0.0015321	0.0013317	0.0011582
35	0.0022691	0.0019594	0.0016930	0.0014637	0.0012662	0.0010960	0.0009493
36	0.0019068	0.0016397	0.0014108	0.0012147	0.0010465	0.0009021	0.0007781
37	0.0016024	0.0013721	0.0011757	0.0010080	0.0008649	0.0007425	0.0006378
38	0.0013465	0.0011482	0.0009797	0.0008366	0.0007148	0.0006111	0.0005228
39	0.0011315	0.0009608	0.0008165	0.0006942	0.0005907	0.0005030	0.0004285
40	0.0009509	0.0008041	0.0006804	0.0005761	0.0004882	0.0004140	0.0003512
41	0.0007991	0.0006728	0.0005670	0.0004781	0.0004035	0.0003407	0.0002879
42	0.0006715	0.0005631	0.0004725	0.0003968	0.0003334	0.0002804	0.0002360
43	0.0005643	0.0004712	0.0003937	0.0003293	0.0002756	0.0002308	0.0001934
44	0.0004742	0.0003943	0.0003281	0.0002733	0.0002277	0.0001900	0.0001586
45	0.0003985	0.0003299	0.0002734	0.0002268	0.0001882	0.0001563	0.0001300
46	0.0003348	0.0002761	0.0002279	0.0001882	0.0001556	0.0001287	0.0001065
47	0.0002814	0.0002311	0.0001899	0.0001562	0.0001286	0.0001059	0.0000873
48	0.0002365	0.0001933	0.0001582	0.0001296	0.0001062	0.0000872	0.0000716
49	0.0001987	0.0001618	0.0001319	0.0001076	0.0000878	0.0000717	0.0000587
50	0.0001670	0.0001354	0.0001099	0.0000893	0.0000726	0.0000590	0.0000481

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	0.8163265	0.8130081	0.8097166	0.8064516	0.8032129	0.8000000	0.7968127
2	0.6663890	0.6609822	0.6556410	0.6503642	0.6451509	0.6400000	0.6349106
3	0.5439910	0.5373839	0.5308834	0.5244873	0.5181935	0.5120000	0.5059068
4	0.4440743	0.4368975	0.4298651	0.4229736	0.4162197	0.4096000	0.4031114
5	0.3625096	0.3552012	0.3480689	0.3411077	0.3343130	0.3276800	0.3212043
6	0.2959262	0.2887815	0.2818372	0.2750869	0.2685245	0.2621440	0.2559397
7	0.2415724	0.2347817	0.2282082	0.2218443	0.2156823	0.2097152	0.2039360
8	0.1972020	0.1908794	0.1847840	0.1789067	0.1732388	0.1677722	0.1624988
9	0.1609812	0.1551865	0.1496227	0.1442796	0.1391476	0.1342177	0.1294811
10	0.1314132	0.1261679	0.1211520	0.1163545	0.1117652	0.1073742	0.1031722
11	0.1072761	0.1025755	0.0980987	0.0938343	0.0897712	0.0858993	0.0822089
12	0.0875723	0.0833947	0.0794322	0.0756728	0.0721054	0.0687195	0.0655051
13	0.0714876	0.0678006	0.0643176	0.0610264	0.0579160	0.0549756	0.0521953
14	0.0583572	0.0551224	0.0520790	0.0492149	0.0465189	0.0439805	0.0415899
15	0.0476386	0.0448150	0.0421692	0.0396894	0.0373645	0.0351844	0.0331394
16	0.0388886	0.0364350	0.0341451	0.0320076	0.0300117	0.0281475	0.0264059
17	0.0317458	0.0296219	0.0276479	0.0258126	0.0241058	0.0225180	0.0210405
18	0.0259150	0.0240829	0.0223869	0.0208166	0.0193621	0.0180144	0.0167654
19	0.0211551	0.0195796	0.0181271	0.0167876	0.0155519	0.0144115	0.0133589
20	0.0172694	0.0159183	0.0146778	0.0135384	0.0124915	0.0115292	0.0106445
21	0.0140975	0.0129417	0.0118849	0.0109180	0.0100333	0.0092234	0.0084817
22	0.0115082	0.0105217	0.0096234	0.0088049	0.0080589	0.0073787	0.0067583
23	0.0093944	0.0085543	0.0077922	0.0071007	0.0064730	0.0059030	0.0053851
24	0.0076689	0.0069547	0.0063095	0.0057264	0.0051992	0.0047224	0.0042909
25	0.0062603	0.0056542	0.0051089	0.0046180	0.0041761	0.0037779	0.0034191
26	0.0051105	0.0045969	0.0041367	0.0037242	0.0033543	0.0030223	0.0027244
27	0.0041718	0.0037373	0.0033496	0.0030034	0.0026942	0.0024179	0.0021708
28	0.0034056	0.0030385	0.0027122	0.0024221	0.0021640	0.0019343	0.0017297
29	0.0027801	0.0024703	0.0021961	0.0019533	0.0017382	0.0015474	0.0013783
30	0.0022694	0.0020084	0.0017782	0.0015752	0.0013961	0.0012379	0.0010982
31	0.0018526	0.0016328	0.0014399	0.0012704	0.0011214	0.0009904	0.0008751
32	0.0015123	0.0013275	0.0011659	0.0010245	0.0009007	0.0007923	0.0006973
33	0.0012346	0.0010793	0.0009440	0.0008262	0.0007235	0.0006338	0.0005556
34	0.0010078	0.0008775	0.0007644	0.0006663	0.0005811	0.0005071	0.0004427
35	0.0008227	0.0007134	0.0006190	0.0005373	0.0004667	0.0004056	0.0003528
36	0.0006716	0.0005800	0.0005012	0.0004333	0.0003749	0.0003245	0.0002811
37	0.0005482	0.0004715	0.0004058	0.0003495	0.0003011	0.0002596	0.0002240
38	0.0004475	0.0003834	0.0003286	0.0002818	0.0002419	0.0002077	0.0001785
39	0.0003653	0.0003117	0.0002661	0.0002273	0.0001943	0.0001662	0.0001422
40	0.0002982	0.0002534	0.0002154	0.0001833	0.0001560	0.0001329	0.0001133
41	0.0002435	0.0002060	0.0001744	0.0001478	0.0001253	0.0001063	0.0000903
42	0.0001987	0.0001675	0.0001412	0.0001192	0.0001007	0.0000851	0.0000719
43	0.0001622	0.0001362	0.0001144	0.0000961	0.0000809	0.0000681	0.0000573
44	0.0001324	0.0001107	0.0000926	0.0000775	0.0000649	0.0000544	0.0000457
45	0.0001081	0.0000900	0.0000750	0.0000625	0.0000522	0.0000436	0.0000364
46	0.0000883	0.0000732	0.0000607	0.0000504	0.0000419	0.0000348	0.0000290
47	0.0000720	0.0000595	0.0000492	0.0000407	0.0000337	0.0000279	0.0000231
48	0.0000588	0.0000484	0.0000398	0.0000328	0.0000270	0.0000223	0.0000184
49	0.0000480	0.0000393	0.0000322	0.0000264	0.0000217	0.0000178	0.0000147
50	0.0000392	0.0000320	0.0000261	0.0000213	0.0000174	0.0000143	0.0000117

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	0,7936508	0,7906138	0,7874016	0,784137	0,7812500	0,7782101	0,7751938
2	0,6298816	0,6249121	0,6200012	0,6151480	0,6103516	0,6056110	0,6009254
3	0,4999060	0,4940017	0,4881900	0,4824690	0,4768372	0,4712926	0,4658337
4	0,3967508	0,3905152	0,3844015	0,3784071	0,3725290	0,3667647	0,3611114
5	0,3148816	0,3087076	0,3026784	0,2967899	0,2910383	0,2854200	0,2799313
6	0,2499060	0,2440377	0,2383294	0,2327764	0,2273737	0,2221167	0,2170010
7	0,1993381	0,1929151	0,1876610	0,1825697	0,1776357	0,1728535	0,1682178
8	0,1574112	0,1525021	0,1477645	0,1431919	0,1387779	0,1345163	0,1304104
9	0,1249295	0,1205550	0,1163500	0,1123074	0,1084202	0,1046820	0,1010864
10	0,0991504	0,0953004	0,0916142	0,0880842	0,0847033	0,0814646	0,0783615
11	0,0786908	0,0753363	0,0721372	0,0690857	0,0661744	0,0633965	0,0607454
12	0,0624530	0,0595544	0,0568009	0,0541848	0,0516988	0,0493358	0,0470894
13	0,0495659	0,0470786	0,0447251	0,0424979	0,0403897	0,0383936	0,0365034
14	0,0393380	0,0372163	0,0352166	0,0333317	0,0315544	0,0298783	0,0282972
15	0,0312206	0,0294200	0,0277296	0,0261425	0,0246519	0,0232516	0,0219358
16	0,0247783	0,0232569	0,0218344	0,0205039	0,0192593	0,0180946	0,0170045
17	0,0196653	0,0183849	0,0171924	0,0160815	0,0150463	0,0140814	0,0131818
18	0,0156074	0,0145335	0,0135373	0,0126130	0,0117549	0,0109583	0,0102185
19	0,0123868	0,0114889	0,0106693	0,0099255	0,0092835	0,0087279	0,0082130
20	0,0098308	0,0090822	0,0083932	0,0077588	0,0071746	0,0066365	0,0061405
21	0,0078022	0,0071796	0,0066088	0,0060854	0,0056052	0,0051646	0,0047601
22	0,0061922	0,0056756	0,0052038	0,0047728	0,0043791	0,0040191	0,0036900
23	0,0049145	0,0044866	0,0040975	0,0037434	0,0034211	0,0031277	0,0028605
24	0,0039004	0,0035467	0,0032263	0,0029360	0,0026728	0,0024340	0,0022174
25	0,0030955	0,0028037	0,0025404	0,0023027	0,0020881	0,0018942	0,0017189
26	0,0024568	0,0022164	0,0020003	0,0018061	0,0016313	0,0014741	0,0013325
27	0,0019498	0,0017521	0,0015751	0,0014165	0,0012745	0,0011471	0,0010329
28	0,0015475	0,0013850	0,0012402	0,0011110	0,0009957	0,0008927	0,0008007
29	0,0012282	0,0010949	0,0009765	0,0008714	0,0007779	0,0006947	0,0006207
30	0,0009747	0,0008655	0,0007689	0,0006834	0,0006077	0,0005406	0,0004812
31	0,0007736	0,0006842	0,0006055	0,0005360	0,0004748	0,0004207	0,0003730
32	0,0006140	0,0005409	0,0004767	0,0004204	0,0003709	0,0003274	0,0002892
33	0,0004873	0,0004276	0,0003754	0,0003297	0,0002898	0,0002548	0,0002242
34	0,0003867	0,0003380	0,0002956	0,0002586	0,0002264	0,0001983	0,0001738
35	0,0003069	0,0002672	0,0002327	0,0002028	0,0001769	0,0001543	0,0001347
36	0,0002436	0,0002112	0,0001833	0,0001591	0,0001382	0,0001201	0,0001044
37	0,0001933	0,0001670	0,0001443	0,0001248	0,0001080	0,0000935	0,0000809
38	0,0001534	0,0001320	0,0001136	0,0000979	0,0000843	0,0000727	0,0000627
39	0,0001218	0,0001043	0,0000895	0,0000768	0,0000659	0,0000566	0,0000486
40	0,0000966	0,0000825	0,0000704	0,0000602	0,0000515	0,0000440	0,0000377
41	0,0000767	0,0000652	0,0000555	0,0000472	0,0000402	0,0000343	0,0000292
42	0,0000609	0,0000515	0,0000437	0,0000370	0,0000314	0,0000267	0,0000227
43	0,0000483	0,0000407	0,0000344	0,0000290	0,0000245	0,0000208	0,0000176
44	0,0000383	0,0000322	0,0000271	0,0000228	0,0000192	0,0000162	0,0000136
45	0,0000304	0,0000255	0,0000213	0,0000179	0,0000150	0,0000126	0,0000106
46	0,0000242	0,0000201	0,0000168	0,0000140	0,0000117	0,0000098	0,0000082
47	0,0000192	0,0000159	0,0000132	0,0000110	0,0000091	0,0000076	0,0000063
48	0,0000152	0,0000126	0,0000104	0,0000086	0,0000071	0,0000059	0,0000049
49	0,0000121	0,0000099	0,0000082	0,0000068	0,0000056	0,0000046	0,0000038
50	0,0000096	0,0000079	0,0000065	0,0000053	0,0000044	0,0000036	0,0000030

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Экономичные приложения 2

Число периодов	Ставка процентов						
	29.50	30.00	30.50	31.00	31.50	32.00	32.50
1	0.7722008	0.7692308	0.7662835	0.7633588	0.7604563	0.7575758	0.7547170
2	0.5962940	0.5917160	0.5871904	0.5827166	0.5782937	0.5739210	0.5695977
3	0.4604587	0.4551661	0.4499544	0.4448219	0.4397671	0.4347887	0.4298851
4	0.3555666	0.3501278	0.3447926	0.3395587	0.3344237	0.3293853	0.3244416
5	0.2745688	0.2693291	0.2642089	0.2592051	0.2543146	0.2495344	0.2448616
6	0.2120222	0.2071762	0.2024589	0.1978665	0.1933951	0.1890412	0.1848012
7	0.1637237	0.1593663	0.1551409	0.1510431	0.1470685	0.1432130	0.1394726
8	0.1264276	0.1225895	0.1188819	0.1153001	0.1118392	0.1084947	0.1052623
9	0.0976275	0.0942996	0.0910973	0.0880153	0.0850488	0.0821930	0.0794433
10	0.0753880	0.0725382	0.0698063	0.0671873	0.0646759	0.0622674	0.0599572
11	0.0582147	0.0557986	0.0534915	0.0512880	0.0491832	0.0471723	0.0452507
12	0.0449534	0.0429220	0.0409896	0.0391511	0.0374017	0.0357366	0.0341515
13	0.0347131	0.0330169	0.0314097	0.0298864	0.0284423	0.0270732	0.0257747
14	0.0268055	0.0253976	0.0240687	0.0228140	0.0216292	0.0205100	0.0194526
15	0.0206992	0.0195366	0.0184435	0.0174153	0.0164480	0.0155379	0.0146812
16	0.0159839	0.0150282	0.0141329	0.0132941	0.0125080	0.0117711	0.0110802
17	0.0123428	0.0115601	0.0108298	0.0101482	0.0095118	0.0089175	0.0083624
18	0.0095311	0.0088924	0.0082987	0.0077467	0.0072333	0.0067557	0.0063112
19	0.0073599	0.0068403	0.0063592	0.0059135	0.0055006	0.0051179	0.0047632
20	0.0056834	0.0052618	0.0048729	0.0045141	0.0041830	0.0038772	0.0035949
21	0.0043887	0.0040475	0.0037340	0.0034459	0.0031810	0.0029373	0.0027131
22	0.0033889	0.0031135	0.0028613	0.0026305	0.0024190	0.0022252	0.0020476
23	0.0026169	0.0023950	0.0021926	0.0020080	0.0018395	0.0016858	0.0015454
24	0.0020208	0.0018423	0.0016801	0.0015328	0.0013989	0.0012771	0.0011663
25	0.0015605	0.0014172	0.0012875	0.0011701	0.0010638	0.0009675	0.0008802
26	0.0012050	0.0010901	0.0009866	0.0008932	0.0008090	0.0007330	0.0006643
27	0.0009305	0.0008386	0.0007560	0.0006818	0.0006152	0.0005553	0.0005014
28	0.0007185	0.0006450	0.0005793	0.0005205	0.0004678	0.0004207	0.0003784
29	0.0005549	0.0004962	0.0004439	0.0003973	0.0003558	0.0003187	0.0002856
30	0.0004285	0.0003817	0.0003402	0.0003033	0.0002705	0.0002414	0.0002155
31	0.0003309	0.0002936	0.0002607	0.0002315	0.0002057	0.0001829	0.0001627
32	0.0002555	0.0002258	0.0001997	0.0001767	0.0001565	0.0001386	0.0001228
33	0.0001973	0.0001737	0.0001531	0.0001349	0.0001190	0.0001050	0.0000927
34	0.0001523	0.0001336	0.0001173	0.0001030	0.0000905	0.0000795	0.0000699
35	0.0001176	0.0001028	0.0000899	0.0000786	0.0000688	0.0000602	0.0000528
36	0.0000908	0.0000791	0.0000689	0.0000600	0.0000523	0.0000456	0.0000398
37	0.0000701	0.0000608	0.0000528	0.0000458	0.0000398	0.0000346	0.0000301
38	0.0000542	0.0000468	0.0000404	0.0000350	0.0000303	0.0000262	0.0000227
39	0.0000418	0.0000360	0.0000310	0.0000267	0.0000230	0.0000198	0.0000171
40	0.0000323	0.0000277	0.0000237	0.0000204	0.0000175	0.0000150	0.0000129
41	0.0000249	0.0000213	0.0000182	0.0000156	0.0000133	0.0000114	0.0000098
42	0.0000193	0.0000164	0.0000139	0.0000119	0.0000101	0.0000086	0.0000074
43	0.0000149	0.0000126	0.0000107	0.0000091	0.0000077	0.0000065	0.0000056
44	0.0000115	0.0000097	0.0000082	0.0000069	0.0000059	0.0000050	0.0000042
45	0.0000089	0.0000075	0.0000063	0.0000053	0.0000044	0.0000033	0.0000032
46	0.0000068	0.0000057	0.0000048	0.0000040	0.0000034	0.0000028	0.0000024
47	0.0000053	0.0000044	0.0000037	0.0000031	0.0000026	0.0000022	0.0000018
48	0.0000041	0.0000034	0.0000028	0.0000023	0.0000020	0.0000016	0.0000014
49	0.0000032	0.0000026	0.0000022	0.0000018	0.0000015	0.0000012	0.0000010
50	0.0000024	0.0000020	0.0000017	0.0000014	0.0000011	0.0000009	0.0000008

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Приложение 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЗАКАЗЧИКА РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,015000	2,020000	2,025000	2,030000	2,035000	2,040000	2,045000
3	3,045225	3,060400	3,075625	3,090900	3,106225	3,121600	3,137025
4	4,090900	4,121608	4,152516	4,183627	4,214943	4,246464	4,278191
5	5,152267	5,204040	5,256329	5,309136	5,362466	5,416323	5,470710
6	6,229551	6,308121	6,387737	6,468410	6,550152	6,632975	6,716892
7	7,322994	7,434283	7,547430	7,662462	7,779408	7,898294	8,019152
8	8,433839	8,582969	8,736116	8,892336	9,051687	9,214226	9,380014
9	9,559933	9,754628	9,954519	10,159111	10,36850	10,58280	10,80211
10	10,70272	10,94972	11,20338	11,46388	11,73139	12,00611	12,28821
11	11,86326	12,16872	12,48347	12,80780	13,14199	13,48635	13,84118
12	13,04121	13,41209	13,79555	14,19203	14,60196	15,02581	15,46403
13	14,23683	14,68033	15,14044	15,61779	16,11303	16,62684	17,15991
14	15,45038	15,97394	16,51895	17,08632	17,67699	18,29191	18,93211
15	16,68214	17,29342	17,93193	18,59891	19,29568	20,02359	20,78405
16	17,93237	18,63929	19,38022	20,15688	20,97103	21,82453	22,71934
17	19,20136	20,01207	20,86473	21,76159	22,70502	23,69751	24,74171
18	20,48938	21,41231	22,38635	23,41444	24,49969	25,64541	26,85508
19	21,79672	22,84056	23,94601	25,11687	26,35718	27,67123	29,06356
20	23,12367	24,29737	25,54466	26,87037	28,27968	29,77808	31,37142
21	24,47052	25,78332	27,18327	28,67649	30,26947	31,96920	33,78314
22	25,83758	27,29898	28,86286	30,53678	32,32890	34,24797	36,30338
23	27,22514	28,84496	30,58443	32,45288	34,46041	36,61789	38,93703
24	28,63352	30,42186	32,34904	34,42647	36,66653	39,08260	41,68920
25	30,06302	32,03030	34,15776	36,45926	38,94986	41,64591	44,56521
26	31,51397	33,67091	36,01171	38,55304	41,31310	44,31174	47,57064
27	32,98668	35,34432	37,91200	40,70963	43,75906	47,08421	50,71132
28	34,48148	37,05121	39,85980	42,93092	46,29063	49,96758	53,99333
29	35,99870	38,79223	41,85630	45,21885	48,91080	52,96629	57,42303
30	37,53868	40,56808	43,90270	47,57542	51,62268	56,08494	61,00707
31	39,10176	42,37944	46,00027	50,00268	54,42947	59,32834	64,75239
32	40,68829	44,22703	48,15028	52,50276	57,33450	62,70147	68,66625
33	42,29861	46,11157	50,35403	55,07784	60,34121	66,20953	72,75623
34	43,93309	48,03380	52,61289	57,73018	63,45315	69,85791	77,03026
35	45,59206	49,99448	54,92821	60,46208	66,67401	73,65222	81,49662
36	47,27597	51,99437	57,30141	63,27594	70,00760	77,59831	86,16397
37	48,98511	54,03425	59,73395	66,17422	73,45787	81,70225	91,04134
38	50,71989	56,11494	62,22730	69,15945	77,02889	85,97034	96,13820
39	52,48068	58,23724	64,78298	72,23423	80,72491	90,40915	101,4644
40	54,26798	60,40198	67,40255	75,40126	84,55028	95,02552	107,0303
41	56,08191	62,61002	70,08762	78,66330	88,50954	99,82654	112,8467
42	57,92314	64,86222	72,83981	82,02320	92,60737	104,8196	118,9248
43	59,79199	67,15947	75,66080	85,48389	96,84863	110,0124	125,2764
44	61,68887	69,50266	78,55232	89,04841	101,2383	115,4129	131,9138
45	63,61420	71,89271	81,51613	92,71986	106,7817	121,0294	138,8500
46	65,56841	74,33056	84,55403	96,50146	110,4840	126,8706	146,0982
47	67,55194	76,81718	87,66789	100,39665	115,3510	132,9454	153,6726
48	69,56522	79,35352	90,85958	104,4084	120,3883	139,2632	161,5879
49	71,60870	81,94059	94,13107	108,5406	125,6018	145,8337	169,8594
50	73,68283	84,57940	97,48435	112,7969	130,9979	152,6671	178,5030

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЗАКАЗЧИКА РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	0,9523810	0,9478673	0,9433962	0,9389671	0,9345794	0,9302326	0,9259259
2	1,8594104	1,8463197	1,8333927	1,8206264	1,8080182	1,7955652	1,7832647
3	2,7232480	2,6979334	2,6730119	2,6484755	2,6243160	2,6005257	2,5770970
4	3,5459505	3,5051501	3,4651056	3,4257986	3,3872113	3,3493263	3,3121268
5	4,3294767	4,2702845	4,2123638	4,1566794	4,1021974	4,0488849	3,9927100
6	5,0756921	4,9955303	4,9173243	4,8411036	4,7665397	4,6938464	4,6228797
7	5,7863734	5,6829671	5,5823814	5,4845198	5,3892894	5,2966013	5,2063701
8	6,4632128	6,3345660	6,2097938	6,0887510	5,9712985	5,8573036	5,7466389
9	7,1078217	6,9521952	6,8016923	6,6561042	6,5152322	6,3788870	6,2468879
10	7,7217349	7,5376258	7,3600871	7,1888302	7,0235815	6,8640810	6,7100814
11	8,3064142	8,0925363	7,8868746	7,6890425	7,4986743	7,3154241	7,1389643
12	8,8632516	8,6185178	8,3838439	8,1587253	7,9426863	7,7352783	7,5360780
13	9,3935730	9,1170785	8,8526830	8,5997421	8,3576507	8,1258403	7,9037759
14	9,8986409	9,5896479	9,2949839	9,0138423	8,7454680	8,4891537	8,2442370
15	10,3796580	10,0375809	9,7122490	9,4026689	9,1079140	8,8271197	8,5594787
16	10,8377696	10,4621620	10,1058953	9,7677642	9,4466486	9,1415067	8,8513692
17	11,2740662	10,8646086	10,4772597	10,1105767	9,7632230	9,4339598	9,1216381
18	11,6895869	11,2460745	10,8276035	10,4324664	10,0590869	9,7060091	9,3718871
19	12,0853209	11,6076535	11,1581165	10,7347102	10,3355952	9,9597802	9,6035992
20	12,4622103	11,9503825	11,4699212	11,0185072	10,5940142	10,1944914	9,8181474
21	12,8211527	12,2752441	11,7640766	11,2849833	10,8355273	10,4134803	10,0168032
22	13,1630026	12,5831697	12,0415817	11,5351956	11,0612405	10,6171910	10,2007437
23	13,4885739	12,8750424	12,3033790	11,7701367	11,2721874	10,8066893	10,3710589
24	13,7986418	13,1516990	12,5503575	11,9907387	11,4693340	10,9829668	10,5287583
25	14,0939446	13,4139327	12,7833562	12,1978761	11,6535832	11,1469459	10,6747762
26	14,3751853	13,6624954	13,0031662	12,3923725	11,8257787	11,2994845	10,8099780
27	14,6430336	13,8980999	13,2105341	12,5749977	11,9867090	11,4413810	10,9351648
28	14,8981273	14,1214217	13,4061643	12,7464767	12,1371113	11,5733776	11,0510785
29	15,1410736	14,3331012	13,5907210	12,9074898	12,2776741	11,6961652	11,1584060
30	15,3724510	14,5337452	13,7648312	13,0586759	12,4090412	11,8103863	11,2577833
31	15,5928105	14,7239291	13,9290860	13,2006347	12,5318142	11,9166384	11,3497994
32	15,8026767	14,9041982	14,0840434	13,3339293	12,6465553	12,0154776	11,4344994
33	16,0025492	15,0750694	14,2302296	13,4590885	12,7537900	12,1074210	11,5138884
34	16,1929040	15,2370326	14,3681411	13,5766089	12,8540094	12,1929498	11,5869337
35	16,3741943	15,3905522	14,4982464	13,6869567	12,9476723	12,2725114	11,6545682
36	16,5468517	15,5360684	14,6209871	13,7905697	13,0352078	12,3465222	11,7171928
37	16,7112873	15,6739985	14,7367803	13,8878589	13,1170166	12,4153695	11,7751785
38	16,8678927	15,8047379	14,8460192	13,9792102	13,1934735	12,4794135	11,8288690
39	17,0170407	15,9286615	14,9490747	14,0649861	13,2649285	12,5389893	11,8785824
40	17,1590864	16,0461247	15,0462969	14,1455269	13,3317088	12,5944087	11,9246133
41	17,2943680	16,1574642	15,1380159	14,2211520	13,3941204	12,6459615	11,9672346
42	17,4232076	16,2629992	15,2245433	14,2921615	13,4524490	12,6939177	12,0066987
43	17,5459120	16,3630324	15,3061729	14,3588371	13,5069617	12,7385281	12,0432395
44	17,6627733	16,4578506	15,3831820	14,4214433	13,5579081	12,7800261	12,0770736
45	17,7740698	16,5477257	15,4558321	14,4802284	13,6055216	12,8186290	12,1084015
46	17,8800665	16,6329154	15,5243699	14,5354257	13,6500202	12,8545386	12,1374088
47	17,9810157	16,7136639	15,5890282	14,5872542	13,6916076	12,8879429	12,1642674
48	18,0771578	16,7902027	15,6500266	14,6359195	13,7304744	12,9190166	12,1891365
49	18,1687217	16,8627514	15,7075723	14,6816145	13,7667985	12,9479224	12,2121634
50	18,2559255	16,9315179	15,7618606	14,7245207	13,8007463	12,9748116	12,2334846

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЗАКАЗОВ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	0,9216690	0,9174312	0,9132020	0,9090709	0,9049774	0,9009009	0,8968610
2	1,7711143	1,7591112	1,7472530	1,7355372	1,7239614	1,7125233	1,7012206
3	2,5540224	2,5312947	2,5089068	2,4868520	2,4651235	2,4437147	2,4226194
4	3,2755967	3,2397199	3,2044811	3,1698654	3,1358583	3,1024457	3,0696138
5	3,9406421	3,8896513	3,8397088	3,7907868	3,7428582	3,6958970	3,6498778
6	4,5535872	4,4859186	4,4198254	4,3552607	4,2921794	4,2305379	4,1702940
7	5,1185135	5,0329528	4,9496122	4,8684188	4,7893026	4,7121963	4,6370350
8	5,6391830	5,5348191	5,4334358	5,3349262	5,2391879	5,1461228	5,0556368
9	6,1190626	5,9952469	5,8752838	5,7590238	5,6463239	5,5370475	5,4310644
10	6,5613481	6,4176577	6,2787980	6,1445671	6,0147727	5,8892320	5,7677707
11	6,9689844	6,8051906	6,6473041	6,4950610	6,3482106	6,2065153	6,0697495
12	7,3446861	7,1607253	6,9838394	6,8136918	6,6499644	6,4923561	6,3405825
13	7,6909549	7,4869039	7,2911775	7,1033562	6,9230447	6,7498704	6,5834821
14	8,0100967	7,7861504	7,5718516	7,3666875	7,1701762	6,9818652	6,8013292
15	8,3042366	8,0606884	7,8281750	7,6060795	7,3938246	7,1908696	6,9967078
16	8,5753332	8,3125582	8,0622603	7,8237086	7,5962214	7,3791618	7,1719353
17	8,8251919	8,5436314	8,2760368	8,0215533	7,7793858	7,5487944	7,3290899
18	9,0554764	8,7556251	8,4712665	8,2014121	7,9451456	7,7016166	7,4700358
19	9,2677202	8,9501148	8,6495684	8,3649201	8,0951543	7,8392942	7,5964447
20	9,4633366	9,1285457	8,8123821	8,5135637	8,2309089	7,9633281	7,7098159
21	9,6436282	9,2922437	8,9610796	8,6486943	8,3537637	8,0750704	7,8114940
22	9,8097956	9,4424254	9,0968763	8,7715403	8,4649445	8,1753791	7,9026852
23	9,9629452	9,5802068	9,2208916	8,8832184	8,5655607	8,2664316	7,9844711
24	10,1040970	9,7066118	9,3341476	8,9847440	8,6666160	8,3481366	8,0578216
25	10,2341908	9,8225796	9,4375777	9,0770400	8,7390190	8,4217447	8,1236608
26	10,3540929	9,9289721	9,5320344	9,1609455	8,8135919	8,4880583	8,1826070
27	10,4646017	10,0265799	9,6182963	9,2372232	8,8810786	8,5478002	8,2355220
28	10,5664532	10,1161284	9,6970742	9,3065665	8,9421526	8,6016218	8,2829793
29	10,6603255	10,1982829	9,7690176	9,3696059	8,9974232	8,6501098	8,3255420
30	10,7468438	10,2736540	9,8347192	9,4269145	9,0474418	8,6937926	8,3637148
31	10,8265842	10,3428019	9,8947208	9,4790132	9,0927075	8,7331465	8,3979505
32	10,9000776	10,4062403	9,9495167	9,5263756	9,1336719	8,7686004	8,4286552
33	10,9678134	10,4644406	9,9995586	9,5694324	9,1707438	8,8005409	8,4561930
34	11,0302428	10,5178354	10,0452690	9,6085749	9,2042931	8,8293161	8,4808906
35	11,0877814	10,5668215	10,0869945	9,6441590	9,2346543	8,8552398	8,5030409
36	11,1408123	10,6117628	10,1251092	9,6765082	9,2621306	8,8785944	8,5229066
37	11,1896888	10,6529934	10,1599170	9,7059165	9,2869960	8,8996346	8,5407234
38	11,23497362	10,6908196	10,1917051	9,7326514	9,3094987	8,9185897	8,5567026
39	11,2762546	10,7265226	10,2207352	9,7569558	9,3298631	8,9356664	8,5710337
40	11,3145203	10,7573602	10,2472468	9,7790507	9,3482924	8,9510508	8,5838868
41	11,3497883	10,7866990	10,2714582	9,7991370	9,3649705	8,9649106	8,5954141
42	11,3822934	10,8133660	10,2935692	9,8173973	9,3800638	8,9773970	8,6057526
43	11,4122520	10,8379505	10,3137618	9,8339975	9,3937229	8,9886459	8,6150247
44	11,4398636	10,8605050	10,3322026	9,8490887	9,4060840	8,9987801	8,6233406
45	11,4653120	10,8811973	10,3490434	9,8628079	9,4172706	9,0079100	8,6307987
46	11,4887669	10,9001810	10,3644232	9,8752799	9,4273942	9,0161351	8,6374876
47	11,5103842	10,9175972	10,3784687	9,8866181	9,4365559	9,0235452	8,6434867
48	11,5303080	10,9335755	10,3912956	9,8969255	9,4448469	9,0302209	8,6488670
49	11,5486710	10,9482344	10,4033097	9,9062959	9,4523502	9,0362350	8,6536923
50	11,5655954	10,9616829	10,4137075	9,9148145	9,4591404	9,0416532	8,6580200

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЗАКАЗЧИКА РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	0,89228571	0,88888889	0,88496588	0,8810573	0,8771930	0,8733624	0,8695652
2	1,6900510	1,6790123	1,6681024	1,6573192	1,6466605	1,6361244	1,6257089
3	2,4018313	2,3813443	2,3611526	2,3412504	2,3216320	2,3022921	2,2832251
4	3,0373493	3,0056394	2,9744713	2,9438329	2,9137123	2,8840979	2,8549784
5	3,6047762	3,5605683	3,5172313	3,4747427	3,4330810	3,3922252	3,3521551
6	4,1114073	4,0538385	3,9975498	3,9425046	3,8886675	3,8360046	3,7844827
7	4,5637565	4,4923009	4,4226104	4,3546296	4,2883048	4,2235848	4,1604197
8	4,9676398	4,8820453	4,7987703	4,7177353	4,6388839	4,5620828	4,4873215
9	5,3282498	5,2284847	5,1316551	5,0376522	4,9463718	4,8577142	4,7715839
10	5,6502230	5,5364308	5,4262435	5,3195174	5,2161156	5,1159076	5,0187686
11	5,9376991	5,8101607	5,6869411	5,5678567	5,4527330	5,3414040	5,2337118
12	6,1943742	6,0534762	5,9176470	5,7866579	5,6602921	5,5383441	5,4206190
13	6,4235484	6,2697566	6,1218115	5,9794343	5,8423615	5,7103442	5,5831470
14	6,6281682	6,4620059	6,3024881	6,1492813	6,0020715	5,8605626	5,7244756
15	6,8108645	6,6328941	6,4623788	6,2989263	6,1421680	5,9917578	5,8437011
16	6,9739862	6,7847948	6,6038751	6,4307720	6,2650596	6,1063386	5,9542349
17	7,1196305	6,9198176	6,7290930	6,5469357	6,3728593	6,2064093	6,0471608
18	7,2496701	7,0398378	6,8399053	6,6492826	6,4674205	6,2938072	6,1279659
19	7,3657769	7,1465225	6,9379693	6,7394560	6,5503688	6,3701373	6,1982312
20	7,4694436	7,2313534	7,0247516	6,8189040	6,6231306	6,4368012	6,2593315
21	7,5620032	7,3256474	7,1015501	6,8889022	6,6869566	6,4950229	6,3124622
22	7,6446457	7,4005755	7,1695133	6,9505746	6,7429444	6,5458715	6,3586627
23	7,7184337	7,4671782	7,2296578	7,0049115	6,7920565	6,5902808	6,3988372
24	7,7843158	7,5263806	7,2828830	7,0527855	6,8351373	6,6290662	6,4337714
25	7,8431391	7,57970050	7,3299850	7,0946652	6,8729274	6,6629399	6,4641491
26	7,8956899	7,6257822	7,3716681	7,1321279	6,9060767	6,6925239	6,4905644
27	7,9425535	7,6673620	7,4085559	7,1648704	6,9351550	6,7183615	6,5135343
28	7,9844228	7,7043218	7,4411999	7,1937184	6,9606623	6,7409271	6,5335081
29	8,0218060	7,7371749	7,4700884	7,2191352	6,9830371	6,7606350	6,5508766
30	8,0551840	7,7663777	7,4956534	7,2415288	7,0026641	6,7778472	6,5659796
31	8,0849857	7,7923357	7,5182774	7,2612589	7,0198808	6,7928796	6,5791127
32	8,1115944	7,8154095	7,5382986	7,2786422	7,0349832	6,8060084	6,5905328
33	8,1353521	7,8359196	7,5560164	7,2939579	7,0482308	6,8174746	6,6004633
34	8,1565644	7,8541507	7,5716960	7,3074519	7,0598516	6,8274887	6,6090985
35	8,1755039	7,8703562	7,5855716	7,3193408	7,0700453	6,8362347	6,6166074
36	8,1924142	7,8847611	7,5978510	7,3298157	7,0789871	6,8438731	6,6231369
37	8,2075127	7,8975654	7,6087177	7,3390447	7,0868308	6,8505442	6,6288147
38	8,2209935	7,9089470	7,6183343	7,3471759	7,0937112	6,8563705	6,6337519
39	8,2330299	7,9190640	7,6268445	7,3543400	7,0997467	6,8614589	6,6380451
40	8,2437767	7,9280569	7,6343756	7,3606520	7,1050409	6,8659030	6,6417784
41	8,2533720	7,9360506	7,6410404	7,3662132	7,1096850	6,8697843	6,6450247
42	8,2619393	7,9431561	7,6469384	7,3711130	7,1137588	6,8731740	6,6478475
43	8,2695887	7,9494721	7,6521579	7,3754299	7,1173323	6,8761345	6,6503022
44	8,2764185	7,9550863	7,6567769	7,3792334	7,1204669	6,8787201	6,6524367
45	8,2825165	7,9600767	7,6608645	7,3825845	7,1232166	6,8809783	6,6542928
46	8,2879611	7,9645126	7,6644819	7,3855370	7,1256286	6,8829504	6,6559068
47	8,2928225	7,9684557	7,6676831	7,3881383	7,1277444	6,8846729	6,6573102
48	8,2971629	7,9719606	7,6705160	7,3904303	7,1296003	6,8861772	6,6585306
49	8,3010383	7,9750761	7,6730230	7,3924496	7,1312284	6,8874910	6,6595919
50	8,3044985	7,9778454	7,6752416	7,3942287	7,1326565	6,8886384	6,6605147

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ПОСЛУЖИТЕЛЬСКИХ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	0,8658009	0,8620690	0,8583691	0,8547009	0,8510638	0,8474576	0,8438819
2	1,6154120	1,6052319	1,5951666	1,5852144	1,5753735	1,5656421	1,5560184
3	2,2644260	2,2458895	2,2276108	2,2095850	2,1918072	2,1742729	2,1569776
4	2,8263428	2,7981806	2,7704814	2,7432350	2,7164317	2,6900618	2,6641161
5	3,3128509	3,2742937	3,2364647	3,1993462	3,1629206	3,1271710	3,0920811
6	3,7340701	3,6847359	3,6364504	3,5891848	3,5429111	3,4976026	3,4532330
7	4,0987620	4,0385654	3,9797858	3,9223801	3,8663073	3,8115276	3,7580025
8	4,4145125	4,3435909	4,2744942	4,2071625	4,1415382	4,0775658	4,0151920
9	4,6878896	4,6065439	4,5274628	4,4505662	4,3757772	4,3032028	4,2322295
10	4,9245798	4,8332275	4,7446033	4,6586036	4,5751295	4,4940863	4,4153836
11	5,1295063	5,0286444	4,9309900	4,8364134	4,7447911	4,6560053	4,5699480
12	5,3064919	5,1971072	5,0909785	4,9883875	4,8891839	4,7932249	4,7003746
13	5,4605471	5,3423338	5,2283077	5,1182799	5,0120714	4,9095126	4,8104427
14	5,5935472	5,4675291	5,3461869	5,2292991	5,1166565	5,0080615	4,9033272
15	5,7086989	5,5754562	5,4473707	5,3241872	5,2056651	5,0915776	4,9817107
16	5,8083973	5,6684967	5,5342238	5,4052882	5,2814171	5,1623539	5,0478571
17	5,8947163	5,7487040	5,6087758	5,4746053	5,3458869	5,2223338	5,1036769
18	5,9694513	5,8178483	5,6727689	5,5338507	5,4007548	5,2731642	5,1507822
19	6,0341570	5,8774554	5,7276986	5,5844878	5,4474509	5,3162409	5,1905335
20	6,0901792	5,9288409	5,7748486	5,6277673	5,4871923	5,3527465	5,2240789
21	6,1386833	5,9731387	5,8153207	5,6647584	5,5210147	5,3836835	5,2523873
22	6,1806782	6,0113265	5,8500607	5,6953747	5,5497997	5,4099012	5,2762762
23	6,2170374	6,0442470	5,8798804	5,7233972	5,5742976	5,4321197	5,2964356
24	6,2485172	6,0726267	5,9054768	5,7464933	5,5951469	5,4503489	5,3134478
25	6,2757725	6,0970920	5,9274479	5,7662336	5,6128910	5,4669058	5,3278040
26	6,2993701	6,1181827	5,9463072	5,7831066	5,6279923	5,4804287	5,3399190
27	6,3198010	6,1363644	5,9624954	5,7975262	5,6408446	5,4918887	5,3501426
28	6,3374900	6,1520383	5,9763909	5,8098514	5,6517826	5,5016006	5,3587701
29	6,3528052	6,1655503	5,9883184	5,8203859	5,6610916	5,5098310	5,3660508
30	6,3660651	6,1771985	5,9985566	5,8293896	5,6690141	5,5168060	5,3721947
31	6,3775456	6,1872401	6,0073447	5,8370851	5,6757567	5,5227169	5,3773795
32	6,3874853	6,1958966	6,0148881	5,8436625	5,6814950	5,5277262	5,3817549
33	6,3960912	6,2033592	6,0213632	5,8492842	5,6863788	5,5319713	5,3854471
34	6,4035422	6,2097924	6,0269212	5,8540891	5,6905351	5,5355689	5,3885630
35	6,4099932	6,2153383	6,0316920	5,8581958	5,6940724	5,5386177	5,3911924
36	6,4155785	6,2201192	6,0357871	5,8617058	5,6970829	5,5412015	5,3934113
37	6,4204143	6,2244240	6,0393023	5,8647058	5,6996450	5,5433911	5,3952838
38	6,4246011	6,2277937	6,0423195	5,8672699	5,7018256	5,5452467	5,3968640
39	6,4282261	6,2308566	6,0449095	5,8694615	5,7036813	5,5468192	5,3981974
40	6,4313646	6,2334971	6,0471326	5,8713346	5,7052607	5,5481519	5,3993227
41	6,4340819	6,2357734	6,0490409	5,8729355	5,7066049	5,5492813	5,4002724
42	6,4364345	6,2377357	6,0506789	5,8743039	5,7077488	5,5502384	5,4010737
43	6,4384715	6,2394273	6,0520849	5,8754734	5,7087224	5,5510495	5,4017500
44	6,4402350	6,2408856	6,0532917	5,8764730	5,7095510	5,5517368	5,4023206
45	6,4417619	6,2421428	6,0543277	5,8773273	5,7102562	5,5523193	5,4028022
46	6,4430839	6,2432265	6,0552169	5,8780576	5,7108563	5,5528130	5,4032086
47	6,4442285	6,2441608	6,0559801	5,8786817	5,7113671	5,5532314	5,4035516
48	6,4452195	6,2449662	6,0566353	5,8792151	5,7118018	5,5535859	5,4038410
49	6,4460775	6,2456605	6,0571977	5,8796710	5,7121717	5,5538864	5,4040852
50	6,4468203	6,2462591	6,0576804	5,8800607	5,7124866	5,5541410	5,4042913

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЗАКАЗОВ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	19.00	19.50	20.00	20.50	21.00	21.50	22.00
1	0.8403361	0.8368201	0.8333333	0.8298755	0.8264463	0.8230453	0.8196721
2	1.5465010	1.5370879	1.5277778	1.5185689	1.5094597	1.5004488	1.4915345
3	2.1399168	2.1230861	2.1064815	2.0900987	2.0739337	2.0579825	2.0422414
4	2.6385855	2.6134612	2.5887346	2.5643972	2.5404410	2.5168581	2.4936405
5	3.0676349	3.0238169	2.9906121	2.9580060	2.92599843	2.8945334	2.8636398
6	3.4097772	3.3672108	3.3255101	3.2846523	3.2446152	3.2053773	3.1669178
7	3.7056951	3.6545697	3.6045918	3.5557280	3.5079464	3.4612159	3.4155064
8	3.9543657	3.8950374	3.8371598	3.7806872	3.7255755	3.6717826	3.6192676
9	4.1633325	4.0962656	4.0309665	3.9673752	3.9054343	3.8450886	3.7862849
10	4.3389349	4.2646574	4.1924721	4.1223031	4.0540780	3.9877272	3.9231843
11	4.4864999	4.4055711	4.3270601	4.2508739	4.1769239	4.1051253	4.0353970
12	4.6105041	4.5234904	4.4392167	4.3575717	4.2784495	4.2017492	4.1273746
13	4.7147093	4.6221677	4.5326806	4.4461176	4.3623550	4.2812751	4.2027661
14	4.8022768	4.7047429	4.6105672	4.5195997	4.4316983	4.3467284	4.2645623
15	4.8758628	4.7738434	4.6754726	4.5805807	4.4890069	4.4005995	4.3152150
16	4.9376998	4.8316681	4.7295605	4.6311873	4.5363693	4.4449379	4.3567336
17	4.9896637	4.8800570	4.7746338	4.6731845	4.5755115	4.4814304	4.3907653
18	5.0333309	4.9205498	4.8121948	4.7080369	4.6078610	4.5114653	4.4186601
19	5.0700259	4.9544350	4.8434957	4.7369601	4.6345959	4.5361855	4.4415246
20	5.1008621	4.9827908	4.8695797	4.7609627	4.6566908	4.5565312	4.4602661
21	5.1267749	5.0065195	4.8913164	4.7808819	4.6749511	4.5732767	4.4756279
22	5.1485803	5.0263761	4.9094304	4.7974124	4.6900422	4.5870590	4.4882196
23	5.1668490	5.0429926	4.9245253	4.8111306	4.7025142	4.5984025	4.4985407
24	5.1822261	5.0568976	4.9371044	4.8225150	4.7128217	4.6077387	4.5070006
25	5.1951480	5.0685335	4.9475870	4.8319627	4.7213402	4.6154228	4.5119349
26	5.2060067	5.0782707	4.9563225	4.8398031	4.7283804	4.6217471	4.5169188
27	5.2151317	5.0864190	4.9636021	4.8463096	4.7341986	4.6269524	4.5242777
28	5.2227997	5.0932377	4.9696684	4.8517092	4.7390071	4.6312365	4.5280965
29	5.2292435	5.0989437	4.9747237	4.8561902	4.7429811	4.6347626	4.5312266
30	5.2346584	5.1037185	4.9789364	4.8599089	4.7462654	4.6376647	4.5337923
31	5.2392087	5.1077143	4.9824470	4.8629949	4.7489797	4.6400532	4.5358953
32	5.2430325	5.1110580	4.9853725	4.8655560	4.7512229	4.6420191	4.5376191
33	5.2462458	5.1138560	4.9878104	4.8676813	4.7530767	4.6436371	4.5390321
34	5.2489461	5.1161975	4.9898420	4.8694451	4.7546089	4.6449688	4.5401902
35	5.2512152	5.1181569	4.9915350	4.8709088	4.7558751	4.6460649	4.5411395
36	5.2531220	5.1197966	4.9929458	4.8721235	4.7569216	4.6469670	4.5419176
37	5.2547244	5.1211687	4.9941215	4.8731315	4.7577864	4.6477095	4.5425554
38	5.2560709	5.1223169	4.9951013	4.8739680	4.7585012	4.6483205	4.5430782
39	5.2572024	5.1232777	4.9959177	4.8746623	4.7590919	4.6488235	4.5435067
40	5.2581533	5.1240818	4.9965981	4.8752384	4.7595801	4.6492374	4.5438580
41	5.2589524	5.1247546	4.9971651	4.8757165	4.7599835	4.6495781	4.5441459
42	5.2596238	5.1253177	4.9976376	4.8761133	4.7603170	4.6498585	4.5443819
43	5.2601881	5.1257889	4.9980313	4.8764426	4.7605925	4.6500893	4.5445753
44	5.2606623	5.1261831	4.9983594	4.8767158	4.7608203	4.6502793	4.5447339
45	5.2610607	5.1265131	4.9986329	4.8769426	4.7610085	4.6504356	4.5448638
46	5.2613956	5.1267892	4.9988607	4.8771308	4.7611640	4.6505643	4.5449703
47	5.2616769	5.1270202	4.9990506	4.8772870	4.7612926	4.6506702	4.5450677
48	5.2619134	5.1272136	4.9992088	4.8774166	4.7613988	4.6507574	4.5451292
49	5.2621121	5.1273754	4.9993407	4.8775241	4.7614866	4.6508291	4.5451879
50	5.2622791	5.1275108	4.9994506	4.8776134	4.7615592	4.6508882	4.5452360

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

Число периодов	Ставка процентов						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	0,8163265	0,8130081	0,8097166	0,8064516	0,8032129	0,8000000	0,7968127
2	1,4827155	1,4739903	1,4653576	1,4568158	1,4483637	1,4400000	1,4317233
3	2,0267066	2,0113743	1,9962409	1,9813031	1,9665572	1,9520000	1,9376281
4	2,4707809	2,4482718	2,4261060	2,4042767	2,3827769	2,3616000	2,3407395
5	2,8332905	2,8034730	2,7741749	2,7453844	2,7170899	2,6892800	2,6619439
6	3,1292167	3,0922545	3,0560121	3,0204713	2,9856143	2,9514240	2,9178836
7	3,3707892	3,3270361	3,2842203	3,2423156	3,2012967	3,1611392	3,1218194
8	3,5679912	3,5179156	3,4690043	3,4212222	3,3745356	3,3289114	3,2843186
9	3,7289724	3,6731021	3,6186270	3,5655018	3,5136831	3,4631291	3,4137995
10	3,8603856	3,7992700	3,7397789	3,6818563	3,6254483	3,5705033	3,5169717
11	3,9676617	3,9018455	3,8378777	3,7756906	3,7152195	3,6564026	3,5991807
12	4,0652341	3,9852403	3,9133099	3,8513634	3,7873249	3,7251221	3,6646858
13	4,1267217	4,0530409	3,9816274	3,9123898	3,8452409	3,7800977	3,7168811
14	4,1850789	4,1081633	4,0337064	3,9616047	3,8917597	3,8240781	3,7584710
15	4,2327175	4,1529783	4,0758756	4,0012941	3,9291243	3,8592625	3,7916104
16	4,2716061	4,1894132	4,1100208	4,0333017	3,9591360	3,8874100	3,8180162
17	4,3033519	4,2190352	4,1376686	4,0591143	3,9832418	3,9099280	3,8390567
18	4,3292669	4,2431180	4,1600556	4,0799309	4,0026038	3,9279424	3,8558221
19	4,3504219	4,2626976	4,1781826	4,0967184	4,0181557	3,9423539	3,8691810
20	4,3676914	4,2786159	4,1928604	4,1102568	4,0306471	3,9538831	3,8798255
21	4,3817889	4,2915577	4,2047453	4,1211748	4,0408804	3,9631065	3,8883071
22	4,3932970	4,3020794	4,2143687	4,1299797	4,0487393	3,9704852	3,8950655
23	4,4026915	4,3106337	4,2221609	4,1370804	4,0552123	3,9763882	3,9004506
24	4,4103604	4,3175883	4,2284703	4,1428068	4,0604115	3,9811105	3,9047415
25	4,4166207	4,3232425	4,2335792	4,1474248	4,0645875	3,9848884	3,9081605
26	4,4217312	4,3278395	4,2377160	4,1511491	4,0679418	3,9879107	3,9108849
27	4,4259030	4,3315768	4,2410656	4,1541525	4,0706360	3,9903286	3,9130557
28	4,4293086	4,3346153	4,2437778	4,1565746	4,0728000	3,9922629	3,9147854
29	4,4320886	4,3370856	4,2459739	4,1585279	4,0745381	3,9938103	3,9161637
30	4,4343581	4,3390940	4,2477522	4,1601031	4,0759342	3,9950482	3,9172619
31	4,4362107	4,3407268	4,2491920	4,1613735	4,0770556	3,9960386	3,9181370
32	4,4377230	4,3420543	4,2503579	4,1623980	4,0779563	3,9968309	3,9188342
33	4,4389576	4,3431336	4,2513020	4,1632242	4,0786798	3,9974647	3,9193898
34	4,4399653	4,3440111	4,2520664	4,1638905	4,0792609	3,9979718	3,9198325
35	4,4407880	4,3447244	4,2526853	4,1644278	4,0797276	3,9983774	3,9201853
36	4,4414596	4,3453044	4,2531865	4,1648611	4,0801025	3,9987019	3,9204664
37	4,4420079	4,3457759	4,2535923	4,1652106	4,0804036	3,9989615	3,9206903
38	4,4424554	4,3461593	4,2539209	4,1654924	4,0806455	3,9991692	3,9208688
39	4,4428207	4,3464710	4,2541870	4,1657197	4,0808397	3,9993354	3,9210110
40	4,4431190	4,3467244	4,2544024	4,1659030	4,0809958	3,9994683	3,9211243
41	4,4433624	4,3469304	4,2545768	4,1660508	4,0811211	3,9995746	3,9212146
42	4,4435612	4,3470979	4,2547181	4,1661700	4,0812218	3,9996597	3,9212865
43	4,4437234	4,3472340	4,2548325	4,1662661	4,0813026	3,9997278	3,9213438
44	4,4438558	4,3473448	4,2549251	4,1663436	4,0813676	3,9997822	3,9213895
45	4,4439639	4,3474348	4,2550001	4,1664062	4,0814197	3,9998258	3,9214259
46	4,4440522	4,3475079	4,2550608	4,1664566	4,0814616	3,9998606	3,9214549
47	4,4441242	4,3475674	4,2551099	4,1664972	4,0814953	3,9998885	3,9214780
48	4,4441831	4,3476158	4,2551497	4,1665300	4,0815223	3,9999108	3,9214964
49	4,4442311	4,3476551	4,2551820	4,1665565	4,0815440	3,9999286	3,9215111
50	4,4442703	4,3476871	4,2552081	4,1665778	4,0815615	3,9999429	3,9215228

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ КАСОВЫХ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,30	29,00
1	0,7936508	0,7906138	0,7874016	0,7843137	0,7812500	0,7782101	0,7751938
2	1,4235324	1,4154260	1,4074028	1,3994617	1,3916016	1,3838211	1,3761192
3	1,9234384	1,9094276	1,8956928	1,8819308	1,8684387	1,8551137	1,8419529
4	2,3201892	2,2999428	2,2799943	2,2603379	2,2409678	2,2218784	2,2030643
5	2,6350708	2,6086504	2,5826727	2,5571277	2,5320061	2,5072983	2,4829955
6	2,8849768	2,8526881	2,8210021	2,7899041	2,7593797	2,7294150	2,6999965
7	3,0833149	3,0456032	3,0086631	2,9724738	2,9370154	2,9022685	2,8682148
8	3,2407261	3,1981053	3,1564276	3,1156657	3,0757933	3,0367848	2,9986154
9	3,3656557	3,3186603	3,2727777	3,2279731	3,1842135	3,1414668	3,0997022
10	3,4648061	3,4139607	3,3643919	3,3160574	3,2689168	3,2229314	3,1780637
11	3,5434969	3,4892970	3,4365290	3,3851430	3,3350913	3,2863279	3,2388091
12	3,6059499	3,5488514	3,4933299	3,4393279	3,3867900	3,3356637	3,2858985
13	3,6555158	3,5959300	3,5380651	3,4818258	3,4271797	3,3740574	3,3224019
14	3,6948538	3,6331462	3,5732717	3,5151575	3,4587342	3,4039357	3,3506992
15	3,7260745	3,6625662	3,6010013	3,5413000	3,4833861	3,4271873	3,3726350
16	3,7508527	3,6858231	3,6228357	3,5618039	3,5026454	3,4452820	3,3896396
17	3,7705180	3,7042080	3,6400281	3,5778854	3,5176914	3,4593634	3,4028214
18	3,7861254	3,7187415	3,6535654	3,5904984	3,5294466	3,4703217	3,4130398
19	3,7985123	3,7302304	3,6642248	3,6003909	3,5386302	3,4788496	3,4209611
20	3,8083431	3,7393126	3,6726179	3,6081497	3,5458048	3,4854861	3,4271016
21	3,8161453	3,7464922	3,6792267	3,6142351	3,5514100	3,4906506	3,4318617
22	3,8223375	3,7521677	3,6844305	3,6190079	3,5557891	3,4946697	3,4355517
23	3,8272520	3,7565543	3,6885279	3,6227513	3,5592102	3,4977975	3,4384122
24	3,8311524	3,7602010	3,6917543	3,6256873	3,5618830	3,5002315	3,4406296
25	3,8342479	3,7630048	3,6942947	3,6279900	3,5639711	3,5021257	3,4423485
26	3,8367047	3,7652212	3,6962950	3,6297961	3,5656024	3,5035997	3,4436810
27	3,8386545	3,7669733	3,6978701	3,6312126	3,5668769	3,5047469	3,4447140
28	3,8402020	3,7683583	3,6991103	3,6323236	3,5678726	3,5056396	3,4455147
29	3,8414302	3,7694532	3,7000869	3,6331950	3,5686504	3,5063343	3,4461354
30	3,8424049	3,7703187	3,7008558	3,6338784	3,5692582	3,5068750	3,4466166
31	3,8431785	3,7710030	3,7014613	3,6344145	3,5697329	3,5072957	3,4469896
32	3,8437924	3,7715438	3,7019380	3,6348349	3,5701039	3,5076231	3,4472788
33	3,8442797	3,7719714	3,7023134	3,6351646	3,5703936	3,5078779	3,4475029
34	3,8446664	3,7723094	3,7026090	3,6354232	3,5706200	3,5080762	3,4476767
35	3,8449734	3,7725766	3,7028417	3,6356261	3,5707969	3,5082305	3,4478114
36	3,8452170	3,7727878	3,7030250	3,6357851	3,5709351	3,5083506	3,4479158
37	3,8454103	3,7729548	3,7031693	3,6359099	3,5710430	3,5084440	3,4479967
38	3,8455637	3,7730868	3,7032829	3,6360078	3,5711274	3,5085168	3,4480595
39	3,8456855	3,7731912	3,7033724	3,6360845	3,5711933	3,5085734	3,4481081
40	3,8457821	3,7732736	3,7034428	3,6361447	3,5712447	3,5086174	3,4481458
41	3,8458588	3,7733388	3,7034983	3,6361919	3,5712849	3,5086517	3,4481751
42	3,8459197	3,7733904	3,7035419	3,6362290	3,5713164	3,5086783	3,4481977
43	3,8459680	3,7734311	3,7035763	3,6362580	3,5713409	3,5086991	3,4482153
44	3,8460064	3,7734634	3,7036034	3,6362808	3,5713601	3,5087153	3,4482289
45	3,8460368	3,7734888	3,7036247	3,6362967	3,5713751	3,5087278	3,4482395
46	3,8460610	3,7735089	3,7036415	3,6363127	3,5713868	3,5087376	3,4482476
47	3,8460801	3,7735249	3,7036547	3,6363237	3,5713959	3,5087452	3,4482540
48	3,8460953	3,7735374	3,7036652	3,6363323	3,5714031	3,5087511	3,4482589
49	3,8461074	3,7735474	3,7036733	3,6363391	3,5714086	3,5087558	3,4482627
50	3,8461170	3,7735552	3,7036798	3,6363444	3,5714130	3,5087593	3,4482657

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Экономичные приложения 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЛЕЧЕНИЯ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	29.50	30.00	30.50	31.00	31.50	32.00	32.50
1	0.7722008	0.7692308	0.7662835	0.7633588	0.7604563	0.7575758	0.7547170
2	1.3684948	1.3609467	1.3534740	1.3460754	1.3387500	1.3314968	1.3243147
3	1.8289535	1.8161129	1.8034283	1.7908973	1.7785171	1.7662854	1.7541998
4	2.1845201	2.1662407	2.1482209	2.1304559	2.1129408	2.0956708	2.0786413
5	2.4590889	2.4355698	2.4124298	2.3896610	2.3672553	2.3452051	2.3235029
6	2.6711111	2.6427460	2.6148888	2.5875275	2.5606505	2.5342463	2.5083041
7	2.8348348	2.8021123	2.7700297	2.7385706	2.7077190	2.6774593	2.6477767
8	2.9612624	2.9247018	2.8889117	2.8538707	2.8195582	2.7859540	2.7530390
9	3.0688899	3.0190013	2.9800089	2.9418860	2.9046070	2.8681470	2.8324823
10	3.1342779	3.0915395	3.0498153	3.0090733	2.9692829	2.9304144	2.8924394
11	3.1924926	3.1473381	3.1033067	3.0603613	3.0184661	2.9775867	2.9376901
12	3.2374460	3.1902601	3.1442963	3.0995124	3.0588677	3.0193232	2.9718416
13	3.2721591	3.0915395	3.1757060	3.1293988	3.0843101	3.0403964	2.9976163
14	3.2989645	3.2486746	3.1997747	3.1522128	3.1059392	3.0609064	3.0170689
15	3.3196637	3.2682112	3.2182182	3.1696281	3.1223872	3.0764442	3.0317501
16	3.3356477	3.2832394	3.2323511	3.1829222	3.1348852	3.0882153	3.0428303
17	3.3479905	3.2947995	3.2431809	3.1930704	3.1444070	3.0971328	3.0511928
18	3.3575216	3.3036920	3.2514796	3.2008171	3.1516403	3.1038885	3.0575039
19	3.3648816	3.3106323	3.2578388	3.2067306	3.1571409	3.1090064	3.0622671
20	3.3705649	3.3157941	3.2627117	3.2112447	3.1613239	3.1128837	3.0658620
21	3.3749536	3.3198416	3.2664458	3.2146906	3.1645049	3.1158210	3.0685751
22	3.3783425	3.3229551	3.2693071	3.2173211	3.1669239	3.1180462	3.0706227
23	3.3809595	3.3253500	3.2714997	3.2193291	3.1687634	3.1197320	3.0721681
24	3.3829803	3.3271923	3.2731798	3.2208619	3.1701623	3.1210091	3.0733344
25	3.3845408	3.3286095	3.2744673	3.2220320	3.1712261	3.1219766	3.0742146
26	3.3857458	3.3296996	3.2754539	3.2229252	3.1720350	3.1227095	3.0748790
27	3.3866763	3.3305382	3.2762099	3.2236070	3.1726502	3.1232648	3.0753804
28	3.3873948	3.3311832	3.2767892	3.2241275	3.1731180	3.1236854	3.0757588
29	3.3879497	3.3316794	3.2772331	3.2245248	3.1734738	3.1240011	3.0760443
30	3.3883781	3.3320611	3.2775732	3.2248281	3.1737443	3.1242455	3.0762599
31	3.3887090	3.3323547	3.2778339	3.2250596	3.1739501	3.1244284	3.0764226
32	3.3889645	3.3325805	3.2780336	3.2252363	3.1741065	3.1245670	3.0765453
33	3.3891617	3.3327542	3.2781867	3.2253713	3.1742255	3.1246720	3.0766380
34	3.3893141	3.3328879	3.2783040	3.2254742	3.1743160	3.1247515	3.0767079
35	3.3894317	3.3329907	3.2783939	3.2255529	3.1743848	3.1248117	3.0767607
36	3.3895226	3.3330697	3.2784627	3.2256129	3.1744371	3.1248574	3.0768005
37	3.3895927	3.3331306	3.2785155	3.2256587	3.1744769	3.1248920	3.0768306
38	3.3896469	3.3331774	3.2785659	3.2256936	3.1745071	3.1249181	3.0768533
39	3.3896887	3.3332134	3.2785869	3.2257203	3.1745301	3.1249380	3.0768704
40	3.3897210	3.3332410	3.2786107	3.2257407	3.1745476	3.1249530	3.0768833
41	3.3897460	3.3332623	3.2786289	3.2257563	3.1745609	3.1249644	3.0768931
42	3.3897652	3.3332787	3.2786428	3.2257681	3.1745711	3.1249730	3.0769004
43	3.3897801	3.3332913	3.2786535	3.2257772	3.1745787	3.1249796	3.0769060
44	3.3897916	3.3333010	3.2786617	3.2257841	3.1745846	3.1249845	3.0769102
45	3.3898004	3.3333085	3.2786680	3.2257894	3.1745890	3.1249883	3.0769133
46	3.3898073	3.3333142	3.2786728	3.2257934	3.1745924	3.1249911	3.0769157
47	3.3898126	3.3333186	3.2786764	3.2257965	3.1745950	3.1249933	3.0769175
48	3.3898167	3.3333220	3.2786793	3.2257989	3.1745970	3.1249949	3.0769189
49	3.3898198	3.3333246	3.2786814	3.2258007	3.1745985	3.1249961	3.0769199
50	3.3898223	3.3333266	3.2786831	3.2258020	3.1745996	3.1249971	3.0769202

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Приложение 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ЗА РАБОТУ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
1	0,985221	0,980392	0,975509	0,970873	0,966183	0,961538	0,956937
2	1,955883	1,941561	1,927424	1,913470	1,899694	1,886095	1,872668
3	2,912200	2,883883	2,856024	2,828611	2,801637	2,775091	2,748964
4	3,854385	3,807729	3,761974	3,717098	3,673079	3,629895	3,587526
5	4,782645	4,713460	4,645828	4,579707	4,515052	4,451822	4,389977
6	5,697187	5,601431	5,508125	5,417191	5,328553	5,242137	5,157872
7	6,598214	6,471991	6,349391	6,230283	6,114544	6,002055	5,892701
8	7,485925	7,325481	7,170137	7,019692	6,873956	6,732745	6,595886
9	8,360517	8,162237	7,970866	7,786109	7,607687	7,435332	7,268790
10	9,222185	8,982585	8,752064	8,530203	8,316605	8,110896	7,912718
11	10,07112	9,786848	9,514209	9,252624	9,001551	8,760477	8,528917
12	10,90751	10,57534	10,25776	9,954004	9,663334	9,385074	9,118581
13	11,73153	11,34837	10,98318	10,63496	10,30274	9,985648	9,682852
14	12,54338	12,10625	11,69091	11,29607	10,92052	10,56312	10,22283
15	13,34323	12,84926	12,38138	11,93794	11,51741	11,11839	10,73955
16	14,13126	13,57771	13,05600	12,56110	12,09412	11,65230	11,23402
17	14,90765	14,29187	13,71220	13,16612	12,65132	12,16567	11,70719
18	15,67256	14,99203	14,35336	13,75351	13,18968	12,65930	12,15999
19	16,42615	15,67846	14,97889	14,32380	13,70984	13,13394	12,59329
20	17,16864	16,35143	15,58916	14,87747	14,21240	13,59033	13,00794
21	17,90014	17,01121	16,18455	15,41502	14,69797	14,02916	13,40472
22	18,62082	17,65805	16,76541	15,93692	15,16712	14,45112	13,78442
23	19,33086	18,29220	17,33211	16,44361	15,62041	14,85684	14,14777
24	20,03041	18,91393	17,88499	16,93554	16,05837	15,24696	14,49548
25	20,71961	19,52346	18,42438	17,41315	16,48151	15,62208	14,82821
26	21,39863	20,12104	18,95061	17,87684	16,89035	15,98277	15,14661
27	22,06762	20,70690	19,46401	18,32703	17,28536	16,32959	15,45130
28	22,72672	21,28127	19,96489	18,76411	17,66702	16,66306	15,74287
29	23,37608	21,84438	20,45355	19,18845	18,03577	16,98371	16,02189
30	24,01584	22,39646	20,93029	19,60044	18,39205	17,29203	16,28889
31	24,64615	22,93770	21,39541	20,00043	18,73628	17,58849	16,54439
32	25,26714	23,46833	21,84918	20,38877	19,06887	17,87355	16,78889
33	25,87895	23,98856	22,29188	20,76579	19,39021	18,14765	17,02286
34	26,48173	24,49859	22,72379	21,13184	19,70068	18,41120	17,24676
35	27,07589	24,99862	23,14516	21,48722	20,00066	18,66461	17,46101
36	27,66068	25,48884	23,55625	21,83225	20,29049	18,90828	17,66604
37	28,23713	25,96945	23,95732	22,16724	20,57053	19,14258	17,86224
38	28,80505	26,44064	24,34860	22,49246	20,84109	19,36786	18,04999
39	29,36458	26,90259	24,73034	22,80822	21,10250	19,58448	18,22966
40	29,91585	27,35548	25,10278	23,11477	21,35507	19,79277	18,40158
41	30,45896	27,79949	25,46612	23,41240	21,59910	19,99305	18,56611
42	30,99405	28,23479	25,82061	23,70136	21,83488	20,18563	18,72355
43	31,52123	28,66156	26,16645	23,98190	22,06269	20,37079	18,87421
44	32,04062	29,07996	26,50385	24,25427	22,28279	20,54884	19,01838
45	32,55234	29,49016	26,83302	24,51871	22,49545	20,72004	19,15635
46	33,05649	29,89231	27,15417	24,77545	22,70092	20,88465	19,28837
47	33,55319	30,28658	27,46748	25,02471	22,89944	21,04294	19,41471
48	34,04255	30,67312	27,77315	25,26671	23,09124	21,19513	19,53561
49	34,52468	31,05208	28,07137	25,50166	23,27656	21,34147	19,65130
50	34,99969	31,42361	28,36231	25,72976	23,45562	21,48218	19,76201

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0500000	2,0550000	2,0600000	2,0650000	2,0700000	2,0750000	2,0800000
3	3,1525000	3,1680250	3,1836000	3,1992250	3,2149000	3,2306250	3,2464000
4	4,3101250	4,3422664	4,3746160	4,4071746	4,4399430	4,4729219	4,5061120
5	5,5256313	5,5810910	5,6370930	5,6936410	5,7507390	5,8083910	5,8666010
6	6,8019128	6,8880510	6,9753185	7,0637276	7,1532907	7,2440203	7,3359290
7	8,1420085	8,2668938	8,3938376	8,5228699	8,6540211	8,7873219	8,9228034
8	9,5491089	9,7215730	9,8974679	10,076856	10,259803	10,446371	10,636628
9	11,026564	11,256260	11,491316	11,731852	11,977989	12,229849	12,487558
10	12,577893	12,875354	13,180795	13,494423	13,816448	14,147087	14,486562
11	14,206787	14,583498	14,971643	15,371560	15,783599	16,208119	16,645487
12	15,917127	16,386591	16,869941	17,370711	17,888451	18,423728	18,977126
13	17,712983	18,286798	18,882138	19,499808	20,140643	20,805508	21,495297
14	19,598632	20,292572	21,015066	21,767295	22,550488	23,365921	24,214920
15	21,578564	22,408663	23,275970	24,182169	25,129022	26,118365	27,152114
16	23,657492	24,641140	25,672528	26,754010	27,888054	29,077242	30,334283
17	25,840366	26,996403	28,212880	29,493021	30,840217	32,258035	33,750226
18	28,132385	29,481205	30,905653	32,410067	33,999033	36,677388	37,450244
19	30,539004	32,102671	33,759992	35,516722	37,378965	39,353192	41,446263
20	33,065954	34,868318	36,785891	38,825309	40,995492	43,304681	45,761964
21	35,719252	37,786076	39,992727	42,348954	44,865177	47,552532	50,422921
22	38,505214	40,864310	43,392290	46,101636	49,005739	52,118972	56,495755
23	41,430475	44,111847	46,995828	50,098242	53,436141	57,027895	60,893296
24	44,501999	47,537998	50,815577	54,354628	58,176671	62,304987	66,764759
25	47,727099	51,152588	54,864512	58,887679	63,249038	67,977862	73,105940
26	51,113454	54,965981	59,156383	63,715378	68,676470	74,076201	79,954415
27	54,669126	58,989109	63,705766	68,856877	74,483823	80,631916	87,350768
28	58,402583	63,233510	68,528112	74,332574	80,697691	87,679310	95,338830
29	62,322712	67,711354	73,639798	80,164192	87,346529	95,255258	103,96594
30	66,438848	72,435478	79,058186	86,374864	94,460786	103,39940	113,28321
31	70,760790	77,419429	84,801677	92,989230	102,07304	112,15436	123,34587
32	75,298829	82,677498	90,889778	100,03353	110,21815	121,56593	134,21354
33	80,063771	88,224760	97,343165	107,53571	118,93343	131,68338	145,95062
34	85,066959	94,077122	104,18375	115,52553	128,25876	142,55963	158,62667
35	90,320307	100,25136	111,43478	124,03469	138,23688	154,25161	172,31680
36	95,836323	106,76519	119,12087	133,09695	148,91346	166,82048	187,10215
37	101,62814	113,63727	127,26812	142,74825	160,33740	180,33201	203,07032
38	107,70955	120,88732	135,90421	153,02688	172,56102	194,85691	220,31595
39	114,09502	128,53613	145,05846	163,97363	185,64029	210,47118	238,94122
40	120,79977	136,60561	154,76197	175,63192	199,63511	227,25652	259,05652
41	127,83976	145,11892	165,04768	188,04799	214,60957	245,30076	280,78104
42	135,23175	154,10046	175,95054	201,27111	230,63224	264,69832	304,24352
43	142,99334	163,57599	187,50758	215,35373	247,77650	285,50609	329,58301
44	151,14301	173,57267	199,75803	230,35172	266,12086	307,96699	356,94965
45	159,70016	184,11917	212,74351	246,32459	285,74931	332,06452	386,50562
46	168,68516	195,24572	226,50812	263,33568	306,75176	357,96935	418,42607
47	178,11942	206,98423	241,09861	281,45250	329,22439	385,81706	452,90015
48	188,02539	219,36837	256,56453	300,74692	353,27009	415,75333	490,13216
49	198,42666	232,43363	272,95840	321,29547	378,99900	447,93483	530,34274
50	209,34800	246,21748	290,33590	343,17967	406,52893	482,52995	573,77016

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0850000	2,0900000	2,0950000	2,1000000	2,1050000	2,1100000	2,1150000
3	3,2622250	3,2781000	3,2940250	3,3100000	3,3260250	3,3421000	3,3582250
4	4,5395141	4,5731290	4,6069574	4,6410000	4,6752576	4,7097310	4,7444209
5	5,9253728	5,9847106	6,0446183	6,1051000	6,1661597	6,2278014	6,2900293
6	7,4290295	7,5233346	7,6188571	7,7156100	7,8136064	7,9128596	8,0133826
7	9,0604970	9,2004347	9,3426485	9,4871710	9,6340351	9,7832741	9,9349216
8	10,830639	11,028474	11,230200	11,435888	11,645609	11,859434	12,077438
9	12,751244	13,021036	13,297069	13,579477	13,868398	14,163972	14,466343
10	14,835099	15,192930	15,560291	15,937425	16,324579	16,722009	17,129972
11	17,096083	17,560293	18,038518	18,531167	19,038660	19,561430	20,099919
12	19,549250	20,140720	20,752178	21,384284	22,037720	22,713187	23,411410
13	22,210936	22,953385	23,723634	24,522712	25,351680	26,211638	27,103722
14	25,098866	26,019189	26,977380	27,974983	29,013607	30,094918	31,220650
15	28,232269	29,360916	30,540231	31,772482	33,060035	34,405359	35,811025
16	31,632012	33,003399	34,441553	35,949730	37,531339	39,189948	40,929293
17	35,320733	36,973705	38,713500	40,544703	42,472130	44,500843	46,636161
18	39,322995	41,301338	43,391283	45,599173	47,931703	50,396936	52,999320
19	43,665450	46,018458	48,513454	51,159090	53,964532	56,939488	60,094242
20	48,377013	51,160120	54,122233	57,274999	60,630806	64,202832	68,005080
21	53,489059	56,764530	60,263845	64,002499	67,997043	72,265144	76,825664
22	59,003629	62,873338	66,988910	71,402749	76,136732	81,214309	86,660615
23	65,053658	69,531939	74,352856	79,543024	85,131089	91,147884	97,265886
24	71,583219	76,789813	82,416378	88,497327	95,069854	102,17415	109,85364
25	78,667792	84,700896	91,245934	98,347059	106,05219	114,41331	123,48681
26	86,354565	93,323977	100,91430	109,18177	118,18767	127,99877	138,68780
27	94,694692	102,72313	111,50116	121,09994	131,59737	143,07864	155,63689
28	103,74374	112,96822	123,09377	134,20994	146,41510	159,81729	174,53513
29	113,56196	124,13536	135,78767	148,63093	162,78868	178,39719	195,60668
30	124,21473	136,30754	149,68750	164,49402	180,88149	199,02088	219,10144
31	135,77298	149,57522	164,90781	181,94342	200,87405	221,91317	245,29811
32	148,31368	164,03699	181,57406	201,13777	222,96583	247,32362	274,50739
33	161,92034	179,80032	199,82359	222,25154	247,37724	275,52922	307,07574
34	176,68357	196,98234	219,80683	245,47670	274,35185	306,83744	343,38945
35	192,70168	215,71075	241,68848	271,02437	304,15879	341,58955	383,87924
36	210,08132	236,12472	265,64889	299,12681	337,09547	380,16441	429,02535
37	228,93823	258,37595	291,88653	330,03949	373,49049	422,98249	479,36327
38	249,39798	282,62978	320,61466	364,04343	413,70699	470,51056	535,99004
39	271,59681	309,06646	352,07305	401,44778	458,14622	523,26673	598,07140
40	295,68254	337,88245	386,51999	442,59256	507,25158	581,82607	667,84961
41	321,81555	369,29187	424,23939	487,85181	561,51299	646,82693	745,65231
42	350,16987	403,52813	465,54213	537,63699	621,47186	718,97790	832,40233
43	380,93431	440,84566	510,76864	592,40069	687,72640	799,06547	929,12860
44	414,31373	481,52177	560,29166	652,64076	760,93768	887,96267	1036,9784
45	450,53040	525,85873	614,51936	718,90484	841,83613	986,63856	1157,2309
46	489,82548	574,18602	673,89870	791,79532	931,22893	1096,1688	1291,3125
47	532,46065	626,86276	738,91908	871,97485	1030,0080	1217,7474	1440,8134
48	578,71980	684,28041	810,11639	960,17234	1139,1588	1352,6996	1607,5069
49	628,91098	746,86565	888,07745	1057,1896	1259,7705	1502,4965	1793,3702
50	683,36842	815,08356	973,44481	1163,9085	1393,0464	1668,7712	2000,6078

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1200000	2,1250000	2,1300000	2,1350000	2,1400000	2,1450000	2,1500000
3	3,3744000	3,3906250	3,4069000	3,4232250	3,4396000	3,4560250	3,4725000
4	4,7793280	4,8144531	4,8497970	4,8853604	4,9211440	4,9571486	4,9933750
5	6,3528474	6,4162598	6,4802706	6,5448840	6,6101042	6,6759352	6,7423813
6	8,1151890	8,2182922	8,3227058	8,4284434	8,5355187	8,6439458	8,7537384
7	10,089012	10,245579	10,404658	10,566283	10,730491	10,897318	11,066799
8	12,299693	12,526276	12,757263	12,992731	13,232760	13,477429	13,726819
9	14,775656	15,092061	15,415707	15,746750	16,085347	16,431656	16,785842
10	17,548735	17,978568	18,419749	18,872561	19,337295	19,814246	20,303718
11	20,6654583	21,225889	21,814317	22,420357	23,044516	23,687312	24,349276
12	24,133133	24,879125	25,650178	26,447106	27,270749	28,121972	29,001667
13	28,029109	28,989016	29,984701	31,017465	32,088654	33,199658	34,351917
14	32,3992602	33,612643	34,882712	36,204823	37,581065	39,013609	40,504705
15	37,279715	38,814223	40,417464	42,092474	43,842414	45,670582	47,580411
16	42,753280	44,666001	46,671735	48,774957	50,980352	53,292816	55,717472
17	48,883674	51,249252	53,739060	56,359577	59,117601	62,020275	65,075093
18	55,749715	58,655408	61,725138	64,968120	68,394066	72,013215	75,836357
19	63,439681	66,987334	70,749406	74,738816	78,969235	83,455131	88,211811
20	72,052442	76,360751	80,946829	85,828556	91,024928	96,556125	102,44358
21	81,698736	86,905845	92,469917	98,415411	104,76842	111,55676	118,81012
22	92,502584	98,769075	105,49101	112,70149	120,43600	128,73249	137,63164
23	104,60289	112,11521	120,20484	128,91619	138,29704	148,39871	159,27638
24	118,15524	127,12961	136,83147	147,31988	158,65862	170,91652	184,16784
25	133,33387	144,02081	155,61956	168,20806	181,87083	196,69941	212,79302
26	150,33393	163,02341	176,85010	191,91615	208,33274	226,22083	245,71197
27	169,37401	184,40134	200,84061	218,62483	238,49933	260,02285	283,56877
28	190,69889	208,45151	227,94989	249,36618	272,88923	298,72616	327,10408
29	214,58275	235,50795	258,58338	284,03062	312,09373	343,04145	377,16969
30	241,33268	265,94644	293,19922	323,37475	356,78685	393,78246	434,74515
31	271,29261	300,18974	332,31511	368,03034	407,73701	451,88092	500,95692
32	304,84772	338,71346	376,51608	418,71444	465,82019	518,40365	577,10046
33	342,42945	382,05265	426,46317	476,24089	532,03501	594,57218	664,66552
34	384,52098	430,80923	482,90338	541,53341	607,51991	681,78515	765,36535
35	431,66350	485,66038	546,68082	615,64042	693,57270	781,64400	881,17016
36	484,46312	547,36793	618,74933	699,75188	791,67288	895,98238	1014,3457
37	543,59869	616,78892	700,18674	795,21838	903,50708	1026,8998	1167,4975
38	609,83053	694,88753	792,21101	903,57286	1030,9981	1176,8003	1343,6222
39	684,01020	782,74847	896,19845	1026,5552	1176,3378	1348,4363	1546,1655
40	767,09142	881,59203	1013,7042	1166,1401	1342,0251	1544,9596	1779,0903
41	860,14239	992,79104	1146,4858	1324,5691	1530,9086	1769,9788	2046,9539
42	964,35948	1117,8899	1296,5289	1504,3859	1746,2358	2027,6257	2354,9969
43	1081,0826	1258,6262	1466,0777	1708,4780	1991,7088	2322,6314	2709,2465
44	1211,8125	1416,9544	1657,6678	1940,1225	2271,5481	2660,4129	3116,6334
45	1358,2300	1595,0737	1874,1646	2203,0391	2590,5648	3047,1728	3585,1285
46	1522,2176	1795,4579	2118,8060	2501,4493	2954,2439	3490,0129	4123,8977
47	1705,8838	2020,8902	2395,2508	2840,1450	3368,8380	3997,0648	4743,4824
48	1911,5898	2274,5015	2707,6334	3224,5646	3841,4753	4577,6391	5456,0047
49	2141,9806	2559,8141	3060,6258	3660,8808	4380,2819	5242,3968	6275,4055
50	2400,0182	2880,7909	3459,5071	4156,0997	4994,5213	6003,5444	7217,7163

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1560000	2,1600000	2,1650000	2,1700000	2,1750000	2,1800000	2,1850000
3	3,4890250	3,5056000	3,5222250	3,5389000	3,5556250	3,5724000	3,5892250
4	5,0298239	5,0664960	5,1033921	5,1408130	5,1778594	5,2154320	5,2532316
5	6,8094466	6,8771354	6,9454518	7,0144002	7,0839848	7,1542098	7,2250795
6	8,8649108	8,9774770	9,0914514	9,2068482	9,3236821	9,4419675	9,5617192
7	11,238972	11,413873	11,591541	11,772012	11,955326	12,141522	12,330637
8	13,981013	14,240093	14,504145	14,773255	15,047509	15,326996	15,611805
9	17,148700	17,518508	17,897329	18,284708	18,680823	19,085855	19,499989
10	20,806020	21,321469	21,850388	22,393108	22,949967	23,521309	24,107487
11	25,030954	25,732904	26,455702	27,199937	27,966211	28,755144	29,567372
12	29,910751	30,850169	31,820893	32,823926	33,860298	34,931070	36,037336
13	35,546918	36,786196	38,071341	39,403993	40,785850	42,218663	43,704243
14	42,056690	43,671987	45,353112	47,102672	48,923373	50,818022	52,789528
15	49,575477	51,659505	53,836375	56,110126	58,484964	60,965266	63,555591
16	58,259676	60,925026	63,719377	66,648848	69,719832	72,939014	76,313375
17	68,289926	71,673030	75,233075	78,979152	82,920803	87,068036	91,431350
18	79,874864	84,140715	88,646532	93,405608	98,431944	103,74028	109,34615
19	93,255468	98,603230	104,27321	110,28456	116,65753	123,41353	130,57519
20	108,71007	115,37975	122,47829	130,03294	138,07260	146,62797	155,73160
21	126,56013	134,84051	143,68721	153,13854	163,23531	174,02100	185,54194
22	147,17695	157,41499	168,39560	180,17209	192,80149	206,34479	220,86720
23	170,98937	183,60138	197,18087	211,80134	227,54175	244,48685	262,72763
24	198,49272	213,97761	230,71571	248,80757	268,36155	289,49448	312,33225
25	230,25910	249,21402	269,78381	292,10486	316,32482	342,60349	371,11371
26	266,94926	290,08827	315,29813	342,76268	372,68167	405,27211	440,76975
27	309,32639	337,50239	368,32233	402,03234	438,90096	479,22109	523,31215
28	358,27198	392,50277	430,09551	471,37783	516,70863	566,48089	621,12490
29	414,80414	456,30322	502,06127	552,51207	608,13264	669,44745	737,03300
30	480,09878	530,31173	585,90138	647,43912	715,55585	790,94799	874,38411
31	555,51409	616,16161	683,57510	758,50377	841,77812	934,31863	1037,1452
32	642,61878	715,74746	797,36500	888,44941	990,08929	1103,4960	1230,0170
33	743,22469	831,26706	929,93022	1040,4858	1164,3549	1303,1253	1458,5702
34	859,42451	965,26979	1084,3687	1218,3684	1369,1170	1538,6878	1729,4057
35	993,63531	1120,7130	1264,2895	1426,4910	1609,7125	1816,6516	2050,3457
36	1148,6488	1301,0270	1473,8973	1669,9945	1892,4122	2144,6489	2430,6597
37	1327,6893	1510,1914	1718,0904	1954,8936	2224,5843	2531,6857	2881,3317
38	1534,4812	1752,8220	2002,5753	2288,2255	2614,8866	2988,3891	3415,3781
39	1773,3258	2034,2735	2334,0002	2678,2238	3073,4917	3527,2992	4048,2230
40	2049,1913	2360,7572	2720,1102	3134,5218	3612,3528	4163,2130	4798,1443
41	2367,8159	2739,4784	3169,9284	3668,3906	4245,5145	4913,5914	5686,8009
42	2735,8274	3178,7949	3693,9666	4293,0169	4989,4796	5799,0378	6739,8591
43	3160,8806	3688,4021	4304,4711	5023,8298	5863,6385	6843,8646	7987,7331
44	3651,8171	4279,5465	5015,7089	5878,8809	6890,7753	8076,7603	9466,4637
45	4218,8488	4965,2739	5844,3008	6879,2907	8097,6609	9531,5771	11218,759
46	4873,7704	5760,7177	6809,6105	8049,7701	9515,7516	11248,261	13295,230
47	5630,2048	6683,4326	7934,1962	9419,2310	11182,008	13273,938	15755,848
48	6503,8865	7753,7818	9244,3386	11021,500	13139,860	15664,259	18671,679
49	7512,9889	8995,3869	10770,654	12896,155	15440,335	18484,825	22126,940
50	8678,5022	10435,649	12548,812	15089,502	18143,394	21813,094	26221,424

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ЗА СТОИМОСТЬ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1900000	2,1950000	2,2000000	2,2050000	2,2100000	2,2150000	2,2200000
3	3,6061000	3,6230250	3,6400000	3,6570250	3,6741000	3,6912250	3,7084000
4	5,2912590	5,3295149	5,3680000	5,4067151	5,4456610	5,4848384	5,5242480
5	7,2965982	7,3687703	7,4416000	7,5150917	7,5892498	7,6640786	7,7395826
6	9,6829519	9,8056805	9,9299200	10,055686	10,182992	10,311856	10,442291
7	12,522713	12,717788	12,915904	13,117101	13,321421	13,528904	13,739595
8	15,902028	16,197757	16,499085	16,806107	17,118919	17,437619	17,762306
9	19,923413	20,356319	20,798902	21,251359	21,713892	22,186707	22,670013
10	24,708862	25,325802	25,958682	26,607887	27,273809	27,956849	28,657416
11	30,403546	31,264333	32,150419	33,062504	34,001309	34,967572	35,962047
12	37,180220	38,360878	39,580502	40,840317	42,141584	43,485599	44,873697
13	45,244461	46,841249	48,496603	50,212582	51,991317	53,835003	55,745911
14	54,840909	56,975293	59,195923	61,506162	63,909493	66,409529	69,010011
15	66,260682	69,085475	72,035108	75,114925	78,330487	81,687578	85,192213
16	79,850211	83,557143	87,442129	91,513485	95,779889	100,25041	104,93450
17	96,021751	100,85079	105,93056	111,27375	116,89367	122,80424	129,02009
18	115,26588	121,51669	128,11667	135,08487	142,44134	150,20716	158,40451
19	138,16640	146,21244	154,74000	163,77727	173,35402	183,50170	194,25350
20	165,41802	175,72387	186,68800	198,35160	210,75836	223,95456	237,98927
21	197,84744	210,99002	225,02560	240,01368	256,01762	273,10479	291,34691
22	236,43846	253,13308	271,03072	290,21649	310,78131	332,82232	356,44323
23	282,36176	303,49403	326,23686	350,71087	377,04539	405,37912	435,86075
24	337,01050	363,67536	392,48424	423,60660	457,22492	493,53563	532,75011
25	402,04249	435,59206	471,98108	511,44595	554,24216	600,64579	650,95513
26	479,43056	521,53251	567,37730	617,29237	671,63301	730,78464	795,16526
27	571,52237	624,23135	681,85276	744,83731	813,67594	888,90333	971,10162
28	681,11162	746,95647	819,22331	898,52895	985,54789	1081,0175	1185,7460
29	811,52283	893,61298	984,06797	1083,7274	1193,5129	1314,4363	1447,6077
30	966,71217	1068,8675	1181,8816	1306,8915	1445,1507	1598,0401	1767,0813
31	1151,3875	1278,2967	1419,2579	1575,8043	1749,6323	1942,6188	2156,8392
32	1371,1511	1528,5645	1704,1095	1899,8441	2118,0551	2361,2818	2632,3439
33	1632,6698	1827,6346	2045,9314	2290,3122	2563,8467	2869,9574	3212,4595
34	1943,8771	2185,0233	2456,1176	2760,8262	3103,2545	3487,9982	3920,2006
35	2314,2137	2612,1029	2948,3411	3327,7955	3755,9379	4238,9178	4783,6447
36	2754,9143	3122,4630	3539,0094	4010,9936	4545,6848	5151,2852	5837,0466
37	3279,3481	3732,3433	4247,8112	4834,2473	5501,2787	6259,8115	7122,1968
38	3903,4242	4461,1502	5098,3735	5826,2680	6657,5472	7606,6709	8690,0801
39	4646,0748	5332,0745	6119,0482	7021,6530	8056,6321	9243,1052	10602,898
40	5529,8290	6372,8290	7343,8578	8462,0918	9749,5248	11231,373	12936,535
41	6581,4965	7616,5306	8813,6294	10197,821	11797,925	13647,118	15783,573
42	7832,9808	9102,7541	10577,355	12289,374	14276,489	16582,248	19256,959
43	9322,2472	10878,791	12693,826	14809,696	17275,552	20148,432	23494,490
44	11094,474	13001,155	15233,592	17846,683	20904,418	24481,345	28664,278
45	13203,424	15537,381	18281,310	21506,253	25295,346	29745,834	34971,419
46	15713,075	18568,170	21938,572	25916,035	30608,368	36142,188	42666,131
47	18699,569	22189,963	26327,286	31229,822	37037,126	43913,758	52053,680
48	22253,475	26518,006	31593,744	37632,936	44815,922	53356,216	63506,490
49	26482,636	31690,017	37913,492	45348,688	54228,266	64828,803	77478,917
50	31515,336	37870,570	45497,191	54646,169	65617,202	78767,995	94525,279

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ЗА СТОИМОСТЬ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2250000	2,2300000	2,2350000	2,2400000	2,2450000	2,2500000	2,2550000
3	3,7256250	3,7402500	3,7602250	3,7776000	3,7950250	3,8125000	3,8300250
4	5,5638906	5,6037670	5,6438779	5,6842240	5,7248061	5,7656250	5,8066814
5	7,8157660	7,8926334	7,9701892	8,0484378	8,1273836	8,2070313	8,2873851
6	10,574313	10,707939	10,843184	10,980063	11,118593	11,258789	11,400668
7	13,963634	14,170765	14,391332	14,615278	14,842648	15,073486	15,307839
8	18,093079	18,430041	18,773295	19,122945	19,479097	19,841858	20,211338
9	23,164022	23,668950	24,185019	24,712451	25,251475	25,802322	26,365229
10	29,375927	30,112809	30,868498	31,643440	32,438087	33,252903	34,088362
11	36,985510	38,038755	39,122596	40,237865	41,385418	42,566129	43,780894
12	46,307250	47,787669	49,316406	50,894953	52,524845	54,207661	55,945022
13	57,726381	59,778833	61,905761	64,109741	66,393432	68,759576	71,211003
14	71,714817	74,527964	77,453615	80,496079	83,659823	86,949470	90,369809
15	88,850651	92,669396	96,655214	100,81514	105,15648	109,68684	114,41411
16	109,84205	114,98336	120,36919	126,01077	131,91982	138,10855	144,58971
17	135,55651	142,42953	149,65595	157,25336	165,24017	173,63568	182,46008
18	167,05672	176,18832	185,82510	195,99416	206,72401	218,04460	229,98741
19	205,64448	217,71163	230,49399	244,03276	258,37140	273,55576	289,63419
20	252,91449	268,78531	285,66008	303,60062	322,67239	342,94470	364,49091
21	310,82025	331,60593	353,79020	377,46477	402,72713	429,68087	458,43610
22	381,75481	408,87530	437,93090	469,05632	502,39527	538,10109	576,33730
23	468,64964	503,91662	541,84466	582,62984	626,48211	673,62636	724,30331
24	575,09581	620,81744	670,17816	723,46100	780,97023	843,03295	910,00066
25	705,49237	764,60545	828,67003	898,09164	973,30794	1054,7912	1143,0508
26	865,22816	941,46470	1024,4075	1114,63363	1212,7684	1319,4890	1435,5288
27	1060,9045	1159,0016	1266,1432	1383,14570	1510,8966	1650,3612	1802,5886
28	1300,6080	1426,5719	1564,6869	1716,10067	1882,0663	2063,9515	2263,2487
29	1594,2448	1755,6835	1933,3883	2128,96483	2344,1726	2580,9394	2841,3771
30	1953,9499	2160,4907	2388,7346	2640,91639	2919,4948	3227,1743	3566,9283
31	2394,5886	2658,4036	2951,0872	3275,73632	3635,7711	4034,9678	4477,4950
32	2934,3710	3270,8364	3645,5927	4062,91304	4527,5350	5044,7098	5620,2563
33	3595,6045	4024,1287	4503,3070	5039,01217	5637,7811	6306,8872	7054,4216
34	4405,6156	4950,6783	5562,5841	6249,37509	7020,0374	7884,6091	8854,2992
35	5397,8790	6090,3344	6870,7914	7750,22511	8740,9466	9856,7613	11113,145
36	6613,4018	7492,1113	8486,4274	9611,27913	10883,479	12321,952	13947,998
37	8102,4172	9216,2969	10481,738	11918,9861	13550,931	15403,440	17505,737
38	9926,4611	11337,045	12945,946	14780,5428	16871,909	19255,299	21970,700
39	12160,915	13945,566	15989,244	18328,8731	21006,526	24070,124	27574,228
40	14898,121	17154,046	19747,716	22728,8026	26154,125	30088,655	34606,656
41	18251,198	21100,476	24389,429	28184,7152	32562,886	37611,819	43432,354
42	22358,717	25954,586	30121,945	34950,0469	40541,793	47015,774	54508,604
43	27390,429	31925,140	37201,602	43339,0581	50475,533	58770,718	68409,298
44	33554,275	39268,923	45944,978	53741,4321	62843,038	73464,397	85854,669
45	41104,987	48301,775	56743,048	66640,3758	78240,582	91831,496	107748,61
46	50354,609	59412,183	70078,664	82635,0660	97410,525	114790,37	135225,51
47	61685,397	73077,985	86548,151	102468,482	121277,10	143488,96	169709,01
48	75665,611	89886,922	106887,97	127051,917	150990,99	179362,20	212985,81
49	92568,873	110561,91	132007,64	157557,778	187984,79	224203,75	267298,19
50	113397,87	135992,15	163030,43	195372,644	234042,06	280255,69	335460,22

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Продолжение приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2600000	2,2660000	2,2700000	2,2750000	2,2800000	2,2850000	2,2900000
3	3,8476000	3,8652250	3,8829000	3,9006250	3,9184000	3,9362250	3,9541000
4	5,8479760	5,8895096	5,9312830	5,9732969	6,0155520	6,0580491	6,1007890
5	8,3684498	8,4502297	8,5327294	8,6159533	8,6999066	8,7845931	8,8700178
6	11,544267	11,689541	11,836666	11,985341	12,135880	12,288202	12,442323
7	15,545751	15,787269	16,032439	16,281309	16,533927	16,790340	17,050597
8	20,587646	20,970895	21,361198	21,758670	22,163426	22,575587	22,995270
9	26,940434	27,528182	28,128721	28,742304	29,369186	30,009629	30,663898
10	34,944947	35,823150	36,723476	37,646437	38,592558	39,562373	40,556428
11	45,030633	46,316285	47,638815	48,999207	50,398474	51,837649	53,317792
12	57,738598	59,590101	61,501295	63,473989	65,510047	67,611379	69,779952
13	73,750633	76,381478	79,106644	81,929336	84,852860	87,880623	91,016138
14	93,925798	97,622569	101,46544	105,45990	109,61166	113,92660	118,41082
15	119,34651	124,49255	129,86111	135,46138	141,30293	147,39568	153,74996
16	151,37660	158,48308	165,92360	173,71326	181,86774	190,40345	199,33744
17	191,73451	201,48109	211,72298	222,48440	233,79071	245,66843	258,14530
18	242,58548	255,87358	269,88818	284,66761	300,25211	316,68394	334,00744
19	306,65771	324,68008	343,75799	363,95121	385,32271	407,93886	431,86960
20	387,38872	411,72030	437,57265	465,03779	494,21306	525,20143	558,11178
21	489,10978	521,82618	556,71726	593,92318	633,59272	675,88384	720,96420
22	617,27832	661,11012	708,03093	758,25205	811,99868	869,51074	931,04381
23	778,77069	837,30430	900,19928	967,77137	1040,3583	1118,3213	1202,0465
24	982,25107	1060,1899	1144,2531	1234,9085	1332,6586	1438,0429	1551,6400
25	1238,6363	1342,1403	1454,2014	1575,5083	1706,8031	1848,8851	2002,6156
26	1561,6818	1698,8074	1847,8358	2009,7731	2185,7079	2376,8173	2584,3741
27	1968,7191	2149,9914	2347,7515	2563,4607	2798,7061	3055,2103	3334,8426
28	2481,5860	2720,7391	2982,6443	3269,4124	3583,3438	3926,9452	4302,9470
29	3127,7984	3442,7350	3788,9583	4169,5008	4587,6801	5047,1246	5551,8016
30	3942,0260	4365,0598	4812,9771	5317,1136	5873,2306	6486,5551	7162,8241
31	4967,9527	5511,4156	6113,4809	6780,3198	7518,7351	8336,2233	9241,0431
32	6260,6204	6972,9408	7765,1207	8645,9078	9624,9810	10713,047	11921,946
33	7889,3817	8821,7701	9862,7033	11024,532	12320,976	13767,265	15380,310
34	9941,6210	11160,539	12526,633	14057,279	15771,849	17691,936	19841,600
35	12527,442	14119,082	15909,824	17924,020	20188,966	22735,138	25596,664
36	15785,577	17861,639	20206,477	22854,139	25842,877	29215,652	33020,696
37	19890,828	22595,973	25663,225	29140,027	33079,883	37543,113	42597,998
38	25063,443	28584,906	32593,296	37154,535	42343,250	48243,900	54952,030
39	31580,938	36160,906	41394,486	47373,031	54200,360	61994,411	70889,119
40	39792,982	45744,546	52571,998	60401,615	69377,460	79663,818	91447,963
41	50140,157	57867,851	66767,437	77013,059	88804,149	102369,01	117968,87
42	63177,598	73203,831	84795,645	98192,651	113670,31	131545,17	152180,85
43	79604,773	92603,846	107691,47	125196,63	145499,00	169036,55	196314,29
44	100303,01	117144,87	136769,17	159626,70	186239,72	217212,96	253246,44
45	126382,80	148189,26	173697,84	203525,05	238387,84	279119,66	326688,90
46	159243,33	187460,41	220597,26	259495,43	305137,43	358669,76	421429,68
47	200647,59	237138,52	280159,52	330857,68	390576,92	460891,64	543645,29
48	252816,96	299981,10	355803,59	421844,54	499939,45	592246,76	701303,43
49	318550,37	379477,09	451871,55	537852,79	639923,50	761038,09	904682,42
50	401374,47	480039,51	573877,87	685763,30	819103,08	977934,94	1167041,3

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Экономические приложения 4

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЛАЩЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННЫХ РЕНТЫ

Число периодов	Ставка процентов						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2950000	2,3000000	2,3050000	2,3100000	2,3150000	2,3200000	2,3250000
3	3,9720250	3,9900000	4,0080250	4,0261000	4,0442250	4,0624000	4,0806250
4	6,1437724	6,1870000	6,2304726	6,2741910	6,3181559	6,3623680	6,4068281
5	8,9661852	9,0431000	9,1307668	9,2191902	9,3083750	9,3983258	9,4890473
6	12,598260	12,756030	12,915651	13,077139	13,240513	13,405790	13,572988
7	17,314747	17,582839	17,854924	18,131052	18,411275	18,695643	18,984209
8	23,422597	23,857691	24,300676	24,751679	25,210826	25,678249	26,154076
9	31,332263	32,014998	32,712382	33,424699	34,152237	34,895288	35,654151
10	41,575280	42,619497	43,689659	44,786356	45,910191	47,061780	48,241750
11	54,839988	56,405346	58,015005	59,670126	61,371901	63,121550	64,920319
12	72,017784	74,326950	76,709581	79,167865	81,704050	84,320446	87,019423
13	94,263031	97,625036	101,106003	104,709903	108,440826	112,302988	116,300735
14	123,07063	127,91255	132,94333	138,16997	143,59969	149,23994	155,09647
15	160,37646	167,28631	174,49105	182,00266	189,83359	197,99673	206,50548
16	208,68751	218,47220	228,71082	239,42349	250,63117	262,35568	274,61976
17	271,25033	285,01386	299,46762	314,64477	330,57998	347,30950	364,87118
18	352,26918	371,51802	391,80525	413,18465	435,71268	459,44854	484,45432
19	457,18859	483,97343	512,30585	542,27189	573,96217	607,47207	642,90197
20	593,05922	630,16546	669,55913	711,37618	755,76026	802,86313	852,84511
21	769,01169	820,21510	874,77466	932,90280	994,82474	1060,77933	1131,01977
22	996,87014	1067,2796	1142,5809	1223,1027	1309,1945	1401,2287	1499,6012
23	1291,94683	1388,4635	1492,0681	1603,2645	1722,5908	1850,6219	1987,9716
24	1674,07115	1806,0026	1948,1489	2101,2765	2266,2069	2443,8209	2635,0623
25	2168,92214	2348,8033	2543,3343	2753,6722	2981,0621	3226,8436	3492,4576
26	2809,75417	3054,4443	3320,0513	3608,3106	3921,0967	4260,4336	4628,5063
27	3639,63164	3971,7776	4333,6669	4727,8868	5157,2421	5624,7723	6133,7709
28	4714,32298	5164,3109	5656,4353	6194,5318	6782,7734	7425,6994	8128,2464
29	6106,04826	6714,6042	7382,6481	8115,8366	8920,3470	9802,9233	10770,9265
30	7908,33249	8729,9855	9635,3558	10632,7460	11731,2563	12940,8587	14272,4776
31	10242,2906	11349,981	12575,139	13929,897	15427,602	17082,934	18912,033
32	13264,7663	14755,975	16411,557	18249,165	20288,297	22550,472	25059,443
33	17178,8724	19183,768	21418,082	23907,407	26680,110	29767,623	33204,763
34	22247,6397	26939,899	27951,596	31319,703	35085,345	39294,263	43997,310
35	28811,6934	32422,868	36477,833	41029,810	46138,228	51869,427	58297,436
36	37312,1430	42150,729	47604,573	53750,052	60672,770	68468,644	77245,103
37	48320,2252	54796,947	62124,967	70413,568	79785,693	90379,609	102350,762
38	62575,6916	71237,031	81074,082	92242,774	104919,186	119302,084	136165,759
39	81036,5206	92609,141	105802,677	120839,034	137969,730	157479,751	179691,881
40	104943,294	120392,88	138073,49	158300,13	181431,19	207874,27	238092,74
41	135902,566	156511,75	180186,91	207374,18	238583,02	274395,04	315473,88
42	175994,823	203466,27	235144,92	271661,17	313737,67	362202,45	418003,90
43	227914,296	264507,15	306865,12	355877,13	412566,04	478108,24	553856,16
44	295150,013	343860,30	400459,98	466200,04	542525,34	631103,87	733860,41
45	382220,267	447019,39	522601,27	610723,06	713421,82	833058,11	972366,05
46	494976,245	581126,21	681995,66	800048,21	938150,70	1099637,71	1288386,02
47	640995,238	755465,07	890005,33	1048064,15	1233669,17	1451522,77	1707112,47
48	830089,833	982105,59	1161457,96	1372965,03	1622275,96	1916011,06	2261925,02
49	1074967,33	1276738,3	1515703,6	1798585,2	2133293,9	2529135,6	2997051,7
50	1392083,70	1659760,7	1977994,2	2356147,6	2805282,5	3338460,0	3971094,4

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Оглавление

<http://>

Предисловие	3
Часть I. ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ	5
Глава 1. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ	7
1.1. Нарашение простых процентов	7
1.2. Нарашение сложных процентов	8
1.3. Сравнение силы роста простых и сложных процентов	9
1.4. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители	10
1.5. Удержание простых и сложных процентов	11
1.6. Эквивалентность во времени денежных сумм. Математическое дисконтирование	13
1.7. Номинальная и эффективная процентные ставки	13
1.8. Непрерывное наращение и дисконтирование	14
1.9. Влияние инфляции на ставку процента	14
Вопросы и задачи	15
Глава 2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ	17
2.1. Потоки платежей	17
2.2. Конечная годовая рента	18
2.3. Определение параметров годовой ренты	20
2.4. Рента конечная общая — и платежи и начисление процентов несколько раз в году	22
2.5. «Вечная» годовая рента	23
2.6. Объединение и замена рент	24
2.7. Дюрация потоков платежей	24
Вопросы и задачи	26
Глава 3. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ	30
3.1. Погашение займа одним платежом в конце	30
3.2. Погашение основного долга одним платежом в конце	30
3.3. Погашение основного долга равными годовыми выплатами	31
3.4. Погашение займа равными годовыми выплатами	31
3.5. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год	31
3.6. Общий метод погашения займа	32
3.7. Формирование погасительного фонда по более высоким процентам	33
3.8. Потребительский кредит и его погашение	33
3.9. Льготные кредиты	34
3.10. Погашение традиционной ипотечной ссуды	35
3.11. Замена одного займа другим	36

Узнайте стоимость

написания студенческой

работы на заказ

3.12. Объединение займов	36
3.13. Предоставление ссуды кредит активов	36
Вопросы и задачи	37
Глава 4. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ	39
4.1. Пример детального анализа инвестиционного проекта	39
4.2. Общие понятия и обозначения	40
4.3. Расчет характеристик конечного проекта с начальными инвестициями и постоянными доходами	41
4.4. Расчет характеристик бесконечного проекта с начальными инвестициями	42
4.5. Определение величины инвестиций	42
4.6. Расчет годового дохода для заданной внутренней доходности проекта	42
4.7. Зависимость характеристик процесса от ставки процента	43
4.8. Сравнение инвестиционных проектов	43
4.9. Определение размера платы за аренду оборудования	44
4.10. Определение нормы доходности от сдачи оборудования в аренду	45
4.11. Арендовать оборудование или покупать?	45
Вопросы и задачи	46
Глава 5. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ	48
5.1. Различные виды доходности операций	48
5.2. Текущая и полная доходность	50
5.3. Поток платежей и его доходность	50
5.4. Другие виды доходности	51
5.5. Мгновенная доходность	52
5.6. Эффективная и эквивалентная ставки процента	52
Вопросы и задачи	53
Глава 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ	56
6.1. Общие сведения о финансовых инструментах	56
6.2. Курс и доходность облигации без погашения с периодической выплатой купонных процентов	57
6.3. Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу	58
6.4. Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении	58
6.5. Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением	59
6.6. Зависимость цены (курса) облигации от ставки процента	60
6.7. Цена вечной акции (доход — только дивиденды)	60
6.8. Банковские депозитные сертификаты	60
6.9. Арбитраж и характеристики финансовых инструментов	61
Вопросы и задачи	63

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

Дополнение к части I	65
Глава 7. СИСТЕМА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНДИВИДА ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ	65
7.1. Система предпочтений индивида	65
7.2. Временная ценность денег для индивида	68
7.3. Полезность денег	70
Вопросы и задачи	71
Глава 8. МОДЕЛИ ТОРГОВ	73
8.1. Аукционные торги: два лица и два объекта. Общее описание	73
8.2. Максимизация разности доходов	73
8.3. Максимизация собственного дохода	75
8.4. Одновременные торги	76
8.5. Торги, в которых число лиц велико и может быть неизвестным	76
Вопросы и задачи	77
Часть II. ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ	79
Глава 9. ИЗМЕНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ	81
9.1. Плавающая ставка процента	81
9.2. Случайные потоки платежей	83
9.3. Рисковые инвестиционные процессы	84
9.4. Подсчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности	85
9.5. Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя	86
Вопросы и задачи	87
Глава 10. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ	89
10.1. Определение и сущность риска	89
10.2. Матрицы последствий и рисков	90
10.3. Анализ связанной группы решений в условиях полной неопределенности	91
10.4. Анализ связанной группы решений в условиях частичной неопределенности	92
10.5. Оптимальность по Парето	93
10.6. Правило Лапласа равновозможности	95
Вопросы и задачи	95
Глава 11. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ	97
11.1. Количественная оценка риска	97
11.2. Риск отдельной операции	97
11.3. Некоторые общие измерители риска	100
11.4. Риск разорения	101

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

11.5. Показатели риска в виде отношения	102
11.6. Кредитный риск	102
11.7. Депозитный риск	103
Вопросы и задачи	103
Глава 12. ОБЩИЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКОВ	108
12.1. Диверсификация	108
12.2. Хеджирование	110
12.3. Страхование	111
12.4. Качественное управление рисками	112
12.5. Форвардная и фьючерсная торговля	114
Вопросы и задачи	116
Глава 13. МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ АКТИВОВ	117
13.1. Простейшая биномиальная модель	117
13.2. Биномиальная модель Кокса—Росса—Рубинштейна	119
13.3. Общая экспоненциальная биномиальная модель	120
13.4. Фундаментальный и технический анализ цен	121
Вопросы и задачи	121
Глава 14. БЫСТРЫЙ РОСТ КАПИТАЛА	124
14.1. Постановка задачи о росте капитала	124
14.2. Рост капитала при постоянной доле контрактов	125
14.3. Безгранично делимые и бесплатные рулетки и ценные бумаги	128
14.4. Еще одна стратегия управления капиталом	129
Вопросы и задачи	130
Глава 15. ОПЦИОНЫ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ	131
15.1. Опционы	131
15.2. Определение стоимости опциона на момент исполнения	132
15.3. Ценообразование опционов на основе биномиальной модели	133
15.4. Другой подход к ценообразованию опционов	134
15.5. Создание с помощью опционов безрисковых портфелей	136
Вопросы и задачи	138
Глава 16. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ	139
16.1. Постановка задачи об оптимальном портфеле	139
16.2. Диверсификация портфеля	141
16.3. Портфель Марковица минимального риска	144
16.4. Портфель Тобина минимального риска	146
16.5. Портфель Марковица и Тобина максимальной эффективности	148
Вопросы и задачи	150
Глава 17. Формирование оптимального портфеля с помощью ведущего фактора финансового рынка	153
17.1. Прямой статистический подход	153

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

17.2. Влияние ведущего фактора на соотношение финансового рынка	154
17.3. Эффективность рынка в различных условиях	157
17.4. Эффективность рынка, эффективность ценной бумаги и ее «бета»	160
17.5. Другие ведущие факторы рынка	162
Вопросы и задачи	162
Глава 18. ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК И ЕГО МОДЕЛИ	164
18.1. Соглашения о финансовом рынке	164
18.2. Эффективный рынок	165
18.3. Модель CAPM (Capital Asset Pricing Model — модель ценообразования капитальных активов)	166
18.4. Модель АРТ (Arbitrage Pricing Theory — арбитражная модель ценообразования)	168
18.5. Идеальный финансовый рынок	168
18.6. Инвесторы на идеальном финансовом рынке	169
Вопросы и задачи	171
Дополнение к части II	173
Глава 19. ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ	173
19.1. Простейшие лотереи	173
19.2. Теория ожидаемой полезности	175
Вопросы и задачи	177
Глава 20. ОТНОШЕНИЕ ЛПР, ИНВЕСТОРА К РИСКУ	179
20.1. Измерение неприятия риска	179
20.2. Некоторые известные конкретные функции полезности денег	181
20.3. Коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска	182
20.4. Коллективные решения и разделение риска	184
20.5. Учет отношения ЛПР к риску	186
Вопросы и задачи	187
Указания и ответы к вопросам и задачам	189
Указатель финансовых терминов	194
Библиографический список	196
Приложения	

НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:

1. Дипломы, курсовые,
рефераты, чертежи...

2. Диссертации и научные
работы